Библиотека учителя математики

Б. В. ГНЕДЕНКО

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Рекомендовано
Главным управлением школ
Министерства просвещения
СССР

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1985

ББК 22.1
Г56

Гнеденко Б. В.

Г56 Математика и математическое образование в современном мире.— М.: Просвещение 1985.— 192 с.— (Б-ка учителя математики).

В пособии освещается значение математики в современном мире, рассматривается роль математического образования в общественном прогрессе.

Автор информирует учителя математики о достижениях современной математической науки.

$Г \frac{4306010400-621}{103(03)-85}$ свод. план. под. изд. 1985 г.

ББК 22.1
51

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный период в жизни человечества образно и точно охарактеризован как период научно-технической революции, когда происходит качественный скачок в развитии производительных сил, наука превращается в ведущую силу производства, существенно возрастают внутренние силы научного прогресса, а научные открытия быстро находят использование в производстве. Математика в этом сложном и бурном процессе занимает почетное и видное место, значение которого увеличивается с каждым годом, она в буквальном смысле слова становится производительной силой. При этом оказывается, что проблемы современной практики нуждаются не только в уже разработанных методах исследования и результатах, но выдвигают и такие вопросы, которые могут быть решены лишь с помощью разработки новых математических методов, постановки таких задач математики, которые раньше не рассматривались. Достаточно назвать такие проблемы, как овладение внутриядерной энергией, покорение космоса, создание современных электронных вычислительных машин. Все они выдвинули не только физические, инженерные и технологические проблемы, но и привели к созданию новых разделов математики, таких, как программирование для ЭВМ, ветвящиеся случайные процессы, теория оптимального управления, а также многие другие.

Практика наших дней оказывается богатейшим источником математических задач многих новых типов. Мы вновь оказываемся в том положении, о котором так ярко сказал в прошлом веке великий русский математик П. Л. Чебышев: «Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике»*).

Последние десятилетия принесли математике огромные успехи, в том числе и такие, которые без преувеличения можно назвать новыми направлениями математической мысли. Задачи

---

*) Чебышев П. Л. Черчение географических карт.— Полн. собр. соч., т. V. М.— Л., Изд. АН СССР, 1951, с. 150.

практики при этом оказались надежным руководителем в выборе наиболее перспективных путей развития. Конечно, этими словами ни в коей мере не снимаются со счетов стимулы прогресса математической мысли, связанные с внутренней логикой ее развития. Нет возможности даже перечислить те толчки, которые испытала за последние тридцать — сорок лет математика со стороны практики, чтобы оценить ее вклад в формирование новых направлений теоретической математики и создание мощных орудий исследования важнейших вопросов естествознания, экономики, инженерного дела и организации производства. Наблюдается вечный процесс взаимного воздействия прикладного и теоретического знания: теория позволяет глубже проникать в природу явлений, а практика заставляет теорию оттачивать ее методы и создавать новые. В результате выигрывают обе стороны, и это на нескольких примерах народнохозяйственного значения будет показано в третьей главе настоящей книги.

Сказанное с полной очевидностью показывает, что для страны, для общественного прогресса абсолютно необходимо так организовать учебный процесс в средних школах, ПТУ, вузах, чтобы не просто выполнять учебный план и снабжать всех учащихся в положенные сроки дипломами об их окончании, а при обучении буквально с первых дней школьной и вузовской жизни прививать подавляющему большинству учащихся жажду поиска новых путей, новых возможностей, новых подходов к решению как привычных проблем, стоящих перед обществом, так и возникающих вновь.

В связи со сказанным определенную долю тревоги вызывают факты, приведенные в выступлении заместителя директора Московской городской станции юного техника Ю. М. Вескова: «Сам я инженер, пришел в педагогику из металлургии, поэтому знаю на практике, как необходим современному производству нетрадиционный подход молодых специалистов к технологии. Но выпускники школ, ПТУ, приходя на производство, как правило, не становятся революционерами в изменении технологических процессов. Недавно мы на нашей станции проводили ряд конкурсов: на лучший проект космического корабля будущего, на лучшую модель автомобиля будущего. Результаты нас опечалили: дети, о которых принято говорить, как о неиссякаемом источнике фантазии, творчества, мыслили техническими категориями вчерашнего дня, перенося их в будущее. Лишь двое ребят из нескольких сотен предложили принципиально новые решения. Мы должны позаботиться о том, чтобы выпускники школ были не только добросовестными исполнителями, но и новаторами, преобразователями производства»*).

К этим словам добавим следующее: воспитание потребности

*) «Комсомольская правда» от 14 июля 1983 г., «Школа будущего рождается сегодня».

поиска нового и прогрессивного следует начинать не тогда, когда молодой человек приходит в лабораторию, институт или конструкторское бюро, а еще в школе и ПТУ. И речь при этом идет не обязательно о создании завершенной теории, крупном изобретении или же серьезном усовершенствовании технологического процесса, а пусть о небольшом — разыскании оригинального решения трудной математической задачи, разыскании особого доказательства известной теоремы или же получении следствия из нее, упрощения метода вычислений, упрощения трудовых операций и пр. Важно приучить молодых людей еще на школьной скамье замечать несовершенство существующих методов труда, организации производства и испытывать радость открытия, пусть совсем небольшого. Именно школа должна приучить молодое поколение к мысли о том, что каждый может принять участие в совершенствовании разнообразных сторон нашей жизни.

Задача школы состоит в том, чтобы научить молодое поколение мыслить, учиться и действовать. Но этого мало. Необходимо также, чтобы оно приобрело цельное научное мировоззрение, освещающее жизнь и придающее поступкам человека, его работе высокое назначение, не эгоистические, а глубокие общественные цели. Но чтобы полученные при обучении знания превратились в орудие познания и практической деятельности, необходимо, чтобы они были приобретены усилиями собственной мысли, а не только напряжением одной памяти. Заученные формулировки и зазубренные правила не могут служить активным орудием действия и труда и не являются фундаментом для творческого отношения к делу. Подмена познания зубрежкой является одновременно базой для последующего наплевательского отношения к порученной работе, отношения по принципу «абы как», без понимания и, следовательно, без вдохновения.

Жизнь каждого поколения наполнена своеобразием. Именно поэтому приходится искать новое, перестраивать старое и преодолевать постоянно появляющиеся трудности. К их преодолению и должно быть направлено творческое горение молодежи, а также должна быть воспитана привычка к систематическому труду Важно, чтобы ни один ученик не получал положительных оценок за незнание и ничегонеделание.

Настоящая книга разбита на три главы. Каждая из них посвящена своей особой теме: первая — педагогическим аспектам, вторая — принципиально-методологическим, третья — рассмотрению примеров, взятых преимущественно из собственных работ автора. Первая и вторая главы не требуют от читателя специальных математических знаний. В значительной своей части их содержание охватывает и другие дисциплины школьного курса Только в третьей главе используется математический аппарат, выходящий за пределы курса педагогических институтов (не по трудности, но по характеру) То, что примеры взяты из работ автора, вызвано не стремлением подчеркнуть важность и глубину рассматриваемой тематики, а желанием передать всю гамму оттенков связей теории и практики, личной заинтересованности и увлеченности. Кроме того, хотелось бы показать, что любая область деятельности выдвигает перед математиками интересные и трудные задачи, решение которых далеко не всегда можно найти без одновременной разработки математической теории.

Несомненно, что тема книги необычайно широка: с одной стороны, развитие собственно научных исследований и применений математики, а с другой — проблемы преподавания математики. Эти два направления тесно между собой связаны, но определение содержания математического образования ни в коем случае нельзя привязывать только к состоянию математической науки. Несравненно большее значение для этого имеет, так сказать, социальный заказ общества к математическим знаниям подавляющего большинства его граждан.

Работа над настоящей книгой была завершена в начале августа 1983 года. Однако автор и редакция стремились в ходе издательского процесса преодолеть, по возможности, определенное «отставание» от перемен, связанных с реформой школьного образования. 1983—1984 годы были полны важнейшими для жизни советской школы событиями: был опубликован проект реформы общеобразовательной и профессиональной школы, осуществлено многомесячное всенародное обсуждение этого документа, опубликованы постановление Верховного Совета СССР об основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы, постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР о дальнейшем развитии системы профессионально-технического образования и повышения ее роли в подготовке квалифицированных рабочих кадров, а также документы о мерах по совершенствованию подготовки, повышении квалификации учителей и материальном обеспечении их труда и т. п. С лета 1984 г началось практическое осуществление принятых постановлений. Требуется огромная подготовительная и повседневная работа Министерства просвещения, научной и педагогической общественности. Равнодушных здесь быть не должно, поскольку реформа затрагивает интересы народа в целом и каждой семьи в отдельности.

Процесс, связанный с реформой, только начинается. Будем надеяться, что он принесет богатые плоды и поможет воспитанию нового, еще более культурного, трудолюбивого, новаторского поколения, которое будет заботиться о нуждах страны и народа и для которого безделие и тунеядство будут считаться величайшим позором.

Я был бы рад настоящей книгой внести и свой вклад в это большое, исключительно своевременное и нужное дело.

Обращаюсь с просьбой к читателям высказать пожелания и предложения, предполагающие улучшить книгу.

Автор

Глава I. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Несколько слов об одной несостоявшейся дискуссии

В мае 1983 года мне довелось побывать в Болгарии и посетить университеты Софии и Пловдива. В Пловдивском университете коллеги обратились ко мне с неожиданным вопросом: «Воспитывает ли обучение математике у учащихся моральные устои и моральные принципы?» Нет нужды объяснять, что вопрос застал меня врасплох, тем более что когда обучаешь учащихся математике, то в первую очередь думаешь о том, чтобы привить им интерес к предмету, принципы логического мышления, умение вникать в задачу, посвятить их в вопросы взаимодействия математики и других наук, приобщить к философским и прикладным проблемам математики. Но при этом не задаешься вопросом о взаимодействии математики и морали.

Вопрос меня заинтересовал, и я начал искать ответ. Для начала я ответил, что само содержание математики, ее стремление к логической точности и определенности понятий и выводов неизбежно должно вызывать внутреннюю потребность в честности и правдивости. А это уже тесно связано с моралью. Далее я заявил, что сама увлеченность преподавателя предметом приводит к тому, что он стремится и у учеников воспитать подобную же увлеченность, а также показать им радость познания, мощность человеческого интеллекта, владеющего количественными методами познания. Такое стремление глубоко морально, и поэтому мы невольно, не говоря об этом явно, участвуем и в процессе становления моральных устоев у наших учеников.

После этих, пока еще довольно робких, слов я решился спросить: чем вызван сам поставленный мне вопрос? Оказалось, что накануне в университете с публичной лекцией выступил один из крупных болгарских писателей и заявил примерно следующее: поскольку математика не учит морали, не воспитывает у молодых граждан моральных принципов и, кроме того, не содействует воспитанию патриотизма, то в школьных программах следует уменьшить удельный вес математики, а освободившиеся часы передать на более значимые в этом плане предметы, на литературу и историю родной страны, которые как раз и решают эти задачи.

В такой постановке обсуждаемая проблема становится совсем иной и представляет гораздо большее значение. И в первую очередь возникают вопросы: какие весы существуют для оценки воздействия той или иной дисциплины на моральный облик человека?

Если бы такие статистические данные были собраны и обработаны, то первичные материалы для решения стоящих перед нами проблем были бы у нас на руках. Но этого никто еще не сделал и поэтому категорическое суждение докладчика основано на чисто личных впечатлениях.

Отдельные имеющиеся факты заставляют размышлять и приводят к мнению, что любые дисциплины, в том числе и гуманитарные, способны передавать знания, но не воспитывать нравственность, не прививать моральные устои. Родилось же где-то это обидное название — «урокодатель». Быть может, мы запаздываем и нравственному воспитанию следует уделять большее внимание в начальных классах и даже в дошкольные годы? Возможно, какие-то непоправимые впоследствии ошибки допускаются в семейном воспитании? Возможно, нам нужно обратить особое внимание на то, чтобы учащиеся не получали незаслуженные положительные оценки за плохо выученные уроки, чтобы никто из учителей не выставлял «тройку», имея «два в уме». Завышенные оценки, полученные в школе, воспитывают ложную успокоенность, привычку к небрежному выполнению обязанностей, убежденность в том, что кто-то другой обязан постоянно заботиться о нем и работать на него. Все это перекочевывает из школы в жизнь, уже за пределы школы. С первого класса школы мы обязаны воспитывать чувство ответственности и за личные поступки и за порученное дело.

Это, именно это, будет оказывать основное воспитывающее влияние, создавать характеры, полные достоинства и убежденности в том, что любое дело должно быть сделано только хорошо, а любое дело, порученное мне, мной же должно быть и выполнено. Мы сами порождаем ущербные характеры, когда слишком опекаем ребят и не поручаем им дела, выполнение которых обязательно, а невыполнение приводит к тяжелым последствиям. Непомерные заботы взрослых, их повседневная опека и стремление оградить детей от выполнения скучных обязанностей, пусть даже мелких, но абсолютно необходимых, приводит к прочному воспитанию иждивенческих тенденций.

Но это только часть дела. Абсолютно необходимо воспитывать в детях (да и только ли в детях!) твердую привычку поступать так, чтобы их поступки не причиняли неудобства окружающим, не приносили ущерба ни гражданам, ни обществу в целом. Как часто приходится наблюдать в школах, институтах, на улице, в общественном транспорте группы молодых людей, становящихся на дороге, мешающих нормальному движению. У них даже не возникает мысли о том, что они кому-то мешают, создают неудобства для других. Они не привыкли вести себя так, чтобы было удобно и им и окружающим. Сколько раз на просьбы встать в сторонку и освободить проход, в ответ я слышал слова: «А вы обойдите». Пусть то, о чем я говорю, может показаться мелким, не заслуживающим внимания, но эти мелочи, наслаиваясь друг на друга, формируют характер эгоиста, для которого интересы общества безразличны. Беда в том, что ни семья, ни школа не обращают достаточного внимания на личную ответственность каждого члена общества за дела и проступки, независимо от его возраста. Не случайно в материалах о реформе народного образования подчеркивается особая актуальность совместной и согласованной воспитательной работы школы, семьи и общественности.

В рукописях, оставшихся после моего учителя А. Я. Хинчина, я нашел почти полностью подготовленную к печати статью «О воспитательном эффекте уроков математики». Статья мне понравилась, я ее отредактировал, и она была опубликована в нескольких изданиях *). В ней целый раздел озаглавлен «Моральные моменты и воспитание патриотизма». Иными словами, эта статья имеет непосредственное отношение к обсуждаемому вопросу. Я позволю себе напомнить читателям взгляды Хинчина и привести здесь довольно обширные выдержки из указанного раздела.

«О роли и значении уроков математики в воспитании правильного и дисциплинированного мышления говорилось и писалось очень много. Напротив, о влиянии математических занятий на формирование характера и моральной личности учащегося не сказано почти ничего. Это вполне понятно: по абстрактности своего предмета математическая наука не может, конечно, давать учащемуся тех непосредственно впечатляющих, этически воздействующих и формирующих характер образов, картин, эмоций, какими обладают, скажем, уроки истории или литературы. Было бы, однако, весьма поверхностно делать отсюда вывод, что в деле формирования нравственной личности школьника уроки математики вообще должны быть скинуты со счетов. По моему многолетнему опыту работа над усвоением математической науки неизбежно воспитывает — исподволь и весьма постепенно — в молодом человеке целый ряд черт, имеющих ярко моральную окраску и способных в дальнейшем стать важнейшими моментами в его нравственном облике. Сделать этот процесс более активным и результаты его более прочными — достойная задача для учителя». Среди черт, которые воспитывает математика, Хинчин отметил четыре следующие: честность, правдивость, настойчивость и мужество.

---

*) «Математика в школе», 1962, № 3, с. 30—44.

«Математическое просвещение», 1961, вып. 6, с. 29—36.

Хинчин А. Я. «Педагогические статьи», 1963, изд. АН Акад. пед. наук, с. 128—160.

Сб. «Математика как профессия». «Знание», 1980, с. 33—64. Серия «Математика и кибернетика», № 6.

Далее Хинчин говорит: «В обывательских тяжбах всякого рода каждая из спорящих сторон исходит, как правило, из желательного ей, выгодного для нее решения вопроса и с большей или меньшей изобретательностью изыскивает возможно более убедительную аргументацию для решения вопроса в свою пользу. В зависимости от эпохи, среды и содержания спора, стороны при этом апеллируют к тому или другому высшему авторитету общечеловеческой морали, естественному праву, священному писанию, юридическому кодексу, действующим правилам внутреннего распорядка, а часто и к высказываниям отдельных авторитетных ученых или признанных политических руководителей. Все мы много раз наблюдали, с какого рода страстностью ведутся подобного рода споры и какой убежденностью дышит, по видимости, аргументация каждой из сторон; можно подумать, такой тяжущийся действительно обуреваем желанием найти и отстоять истинное, справедливое, отвечающее духу и букве призванного в качестве арбитра авторитетного источника, решение.

Но хорошо известно, что подобную картину мы часто наблюдаем не в одних только обывательских тяжбах. В точности те же черты являет подчас и научная дискуссия. Выводы, с полной убежденностью сделанные одним ученым, с такой же убежденностью оспариваются другими; завязывается полемика, в которой каждая из сторон находит все новые и новые аргументы в пользу своей позиции — даже вновь поставленные опыты часто говорят спорящему как раз то, что ему желательно. В ходе полемики каждая из сторон не только стремится все более и более усиливать свою позицию, но и стремится различными средствами дискредитировать позицию противной стороны, доходя иногда до попыток персональной дискредитации. И лишь сравнительно редко бывает, чтобы в такой затянувшейся полемике одна из спорящих сторон нашла честность и мужество признать свою позицию ошибочной...

Само собой разумеется, что так поставленная научная дискуссия сама по себе не содержит еще ничего морально одиозного. Собрать с возможною полнотою все имеющиеся аргументы за и против данной «рабочей гипотезы» — это во всех случаях приносило пользу прогрессу науки; нет, очевидно, ничего предосудительного и в том, что сбор аргументов за и против гипотезы выполняется двумя различными учеными (или группами ученых), если только обе стороны подходят к этой задаче добросовестно, руководясь исключительно желанием способствовать отысканию объективной истины. Моральный одиум, этическое неблагополучие начинается там, где выводы ученого перестают руководствоваться интересами объективной истины, а становятся — сознательно или бессознательно — на службу его интересам — его упрямству, его честолюбию, его корыстолюбию, когда аргументация притягивается за волосы, необъективно акцентируется, точь-в-точь как в обывательских кругах. Такая деградация научного спора в иных случаях ложится мрачным пятном даже на крупнейших представителей научной мысли.

Однако только математическая наука полностью от всего этого избавлена. Она не знает рабочих гипотез — предложений, истинность которых может подлежать дискуссии. Пока предложение не доказано, оно вообще не входит в сокровищницу науки, никому не придет в голову его отстаивать; если же оно доказано, то истинность его никак не может быть подвергнута сомнению: оно является абсолютно обязательным. Никаких промежуточных ситуаций математика не знает Полемизировать, например, в защиту неполноценного доказательства может только неуч, шарлатан или душевнобольной (все три категории действительно время от времени встречаются, достаточно вспомнить так называемых «ферматистов», рыцарей квадратуры круга и трисекции угла); но такой защитник немедленно единогласно и беспощадно разоблачается научным миром. Никакая аргументация с пристрастием или с тенденцией, никакое «притягивание за волосы» ни при каких обстоятельствах не может в математике иметь успеха Разумеется, это относится только к содержанию самой математической науки; в вопросах логического или философского обоснования математики дискуссии возможны и даже неизбежны; возможны и споры персонального характера, связанные с развитием математики (например, по вопросам приоритета).

Каждый математик рано привыкает к тому, что в его науке всякая попытка по тем или иным мотивам действовать тенденциозно, заранее склоняясь к тому или другому решению вопроса и прислушиваясь только к аргументам, говорящим в пользу избранного решения,— всякая такая попытка заранее обречена на неудачу и ничего, кроме разочарования, принести не может. Такое положение, при котором неправильная или не до конца правильная аргументация могла бы оказаться выгодной для аргументирующего, здесь просто принципиально невозможно. Поэтому математик быстро привыкает к тому, что в его науке выгодна только правильная, объективная, лишенная всякой тенденциозности аргументация, что успех может принести только непредубежденное, беспристрастное напряжение мысли. И независимо от своего общего морального уровня он в своей научной работе всегда руководствуется исключительно соображениями объективной истинности.

Но эту черту, естественно развивающуюся у математика-специалиста, в известной степени воспитывает в себе, занимаясь математикой, и каждый неспециалист, в частности каждый школьник. Ему хорошо известно, что втереть очки учителю математики невозможно, что никакой апломб и никакое красноречие не помогут ему выдать незнание за знание, неполноценную аргументацию за полноценную. И как бы лжив он ни был в других отношениях, в математике он остережется отстаивать неверное утверждение или неправильное доказательство.

Но и здесь, как это часто бывает, моральные навыки, приобретенные в какой-либо одной области, в известной мере переносятся и на другие сферы мышления и практической деятельности. Теоретическая честность, ставшая для математика непреложным законом его научного мышления и профессиональной (в частности, педагогической) деятельности, довлеет над ним во всех его жизненных функциях — от абстрактных рассуждений до практического поведения.

Я должен признаться, что органически не способен отстаивать какое-либо утверждение (хотя бы и обыденно-практического содержания), если я не располагаю не допускающим никакого возражения его доказательством. Профессиональная привычка к абсолютной объективности аргументации не позволяет мне, как это делают многие другие, яростно, во что бы то ни стало отстаивать выгодное мне решение. Таким образом, черта, о которой я сейчас говорю, может иногда и повредить своему носителю; тем не менее я дорожу ею и горжусь, что она у меня есть, радуясь и тогда, когда вижу ее у других, потому что придаю ей высокую моральную ценность.

Я всегда интересовался этой чертою и много раз наблюдал, как она развивается в людях под влиянием серьезного научного общения, в частности, под воздействием уроков математики. Это очень радостная и морально возвышающая картина, когда человек постепенно преодолевает в себе отвратительную мещанскую привычку — подчинять законы мышления своим личным, мелким, корыстным интересам, теоретически защищать все то, и только то, что ему практически выгодно: когда он приучается уважать объективную правильность аргументации как высшую духовную и культурную ценность и все чаще и со все более легким сердцем жертвовать ради нее своими личными интересами. Доведенная до предела, эта черта составляет собою ничто иное, как честность и правдивость — одно из лучших украшений нравственной личности человека».

Соображения, высказанные Хинчиным, представляют для нас несомненный интерес. Мы знаем, что характер создается в деле, в работе. И если дело предъявляет определенные требования к моральным нормам, то их трудно изменить и за пределами привычного дела. Когда человек с детства приучен делать свое дело с полной ответственностью, то нужно приложить огромные усилия, чтобы изменить его привычки. Вот почему так важно еще в детстве воспитать усердие, упорство в достижении цели, стремление доводить дело до конца, требовательность к самому себе и желание выполнить порученную работу возможно лучше. «Ясно, какое решающее значение имеют все эти черты для развития морально и общественно полноценной человеческой личности и с каким вниманием поэтому должен учитель следить за максимальным использованием своих уроков в целях воспитательного воздействия в указанном направлении. Те возможности, которыми для этого располагают предметы школьного обучения, весьма разнообразны и многочисленны, и нет такого предмета, в специфических чертах которого не было бы заложено особых, именно этому предмету свойственных движущих рычагов такого воспитательного воздействия. Наша задача здесь, естественно, должна состоять в указании тех черт математики как школьного предмета, которые, отличая ее от других предметов школьного преподавания, наиболее способствуют развитию в учащихся разумной настойчивости и сознательного мужества — этих качеств будущего борца.

Прежде всего я хочу здесь отметить четкую определенность поставленной цели, желаемого и требуемого результата каждого математического задания. Если заданием служит сочинение исторического или литературного содержания, то порой нельзя указать момента, когда такое задание определенно закончено выполнением: возможности дополнения и совершенствования, систематические улучшения всякого рода здесь почти безграничны; с другой стороны, учащийся не чувствует себя здесь достаточно компетентным для авторитетной оценки своей работы: то, что ему представляется в сочинении вполне удачным, может встретить со стороны учителя совсем другую оценку. В математике дело обстоит иначе. Если заданием служит решение задачи или доказательство теоремы, то гем самым указывается с полной определенностью и тот момент, когда задание может считаться окончательно выполненным: когда решена задача или доказана теорема; все остальное — изложение найденного решения, правильность и аккуратность записи и т. п. имеет и в глазах учителя, и в глазах ученика лишь второстепенное, не решающее значение. Равным образом и качество работы здесь всегда оценивается с однозначной определенностью: задача должна быть решена верно, теорема должна быть доказана правильно. Проверить отсутствие логических ошибок ученик может и должен уметь сам; в случае задачи он знает даже определенные приемы проверки решения. Легко понять, какое стимулирующее влияние на упорство, настойчивость в достижении цели может оказать и действительно оказывает эта четкая определенность показателей результата. Победа здесь так же непосредственно ощутительна, как в шахматной партии или спортивном состязании, и сам учащийся может с такой же уверенностью зафиксировать и оценить свое достижение, как и его авторитетный учитель.

Вторая, значительно более глубокая и важная черта математических заданий, которую я хочу здесь отметить, состоит в присущем им в значительном большинстве случаев творческом характере. В то время как в большинстве других областей знания выполнение задания, за немногими исключениями, требует от учащихся лишь определенных знаний и навыков, в лучшем случае еще умения стройно и стилистически правильно излагать эти знания,— решение математической задачи, как правило, предполагает изобретение специального, ведущего к поставленной цели рассуждения, и тем самым становится — пусть весьма скромным — творческим актом. Именно этот творческий, исследовательский характер математических знаний более, чем что-либо другое, влечет к себе молодые силы растущего и крепнущего интеллекта учащегося. Тот, кто раз изведал благородную радость творческого достижения, никогда уже не пожалеет усилий, чтобы вновь ее испытать. Никакие трудности его не остановят, сила его порыва и устремления, его усидчивость и выдержка в преодолении препятствий будут крепнуть с каждым новым достижением, а неудачи, ошибки, временные крушения и поражения он научится встречать как подобает истинному борцу — не опуская перед ними руки, а черпая в них источник и стимул для все новых и новых напряжений мысли и воли» (Хинчин А. Я., там же).

Столь большая выдержка из статьи А. Я. Хинчина оправдана хотя бы тем, что она представляет собой чуть ли не единственное высказывание крупного ученого-математика о воспитании моральных качеств учащихся. С его позицией трудно не согласиться. Однако, чтобы не возникало недоразумений, к сказанному Хинчиным мне хочется добавить еще несколько слов. Мировоззрение человека воспитывается в активном труде, в преодолении трудностей, в таких условиях, когда человек начинает ощущать свои силы и возможности. На помощь ему в этом приходит школа, которая приучает его учиться, преодолевать трудности и добиваться поставленных перед собой задач. Более того, школа приподнимает перед умственным взором учащихся завесу, за которой скрыто многообразие мира и возможностей человека в его познании и проявлении общественной ценности его личности. Школа приучает учащихся с уважением относиться к труду и показывает, что не себя следует ценить в труде, а труд в себе. Школа прививает мысль о том, что почетен каждый вид труда, лишь бы было со стороны такое отношение к нему, за которое он может заслужить уважение окружающих и благодарность за превосходно выполненное дело. Шофер и ученый, врач и рабочий, учитель и колхозник — все необходимы обществу и каждый заслуживает уважения общества за труд бескорыстный, выполненный с усердием и творческим вдохновением. Творческий порыв необходим не только ученому, поэту и музыканту, он необходим рабочему и военачальнику, крестьянину и представителю любой иной профессии. Русская литература оставила нам в наследство изумительный образ тульского умельца Левши, который достиг вершин мастерства, но погиб в борьбе с косностью царской Руси. Сколько первоклассных изобретений было сделано людьми рабочих профессий и какая масса рабочих участвует в исключительно важном для страны и народа деле изобретательства и рационализации. Нужно только найти себя в деле и дело для себя, которое будет радовать и давать ощущение полноты жизни. Очень важно, чтобы школа воспитывала уважение к любым видам труда, как интеллектуальным, так и физическим. Мне известны многочисленные случаи, когда девочка мечтала о профессии портнихи или кулинара. Она мечтает о них, но когда подходит пора выбирать профессию, то решает под влиянием семьи или подруг, что это «непрестижные» профессии и становится студенткой пед- или мединститута. В результате общество теряет отменного повара или швею, способных из продуктов среднего качества изготовить превосходные блюда по вкусу и по внешнему виду или же из обычного материала сшить платье, о котором только можно мечтать, и, к сожалению, не приобретает Врача и Педагога. Мне известна одна профессорская семья в ГДР, в которой старший сын мечтал стать только поваром и выдержал все возражения в семье и среди друзей. Он стал поваром, доволен своей профессией, и, что не менее важно, им довольны те, кого он кормит. Нам нужно добиваться того, чтобы в нашей стране не было «непрестижных» профессий и чтобы к своей профессии люди относились с любовью и уважением. Такое воспитание является важной частью воспитания морального облика гражданина. Очень важно, чтобы не было нелюбимых профессий, и чтобы работа дарила людям радость и внутреннюю гордость за хорошо выполненное дело.

Моральный долг педагога и школы — дать учащимся основные знания, которые им потребуются в жизни, в повседневной работе. Конечно, молодое поколение не станет полностью специалистами в одной какой-то области. В этом случае учить было бы просто и перед преподавателями не возникал бы мучительный вопрос: чему учить, чтобы это было необходимо подавляющему большинству? Математические знания, несомненно, относятся именно к такого рода необходимым сведениям и навыкам. Считать, иметь представления о геометрических телах и фигурах, владеть элементами логических рассуждений, уметь пользоваться простейшими счетными приборами и таблицами, производить действия с элементарными функциями — тригонометрическими и логарифмическими — нужно уметь каждому, кем бы он ни стал. Мы не можем забывать, что школьникам — мальчикам придется служить в армии, а современное военное дело предъявляет значительные требования к математическим знаниям. На производстве и мальчикам, и девочкам придется пользоваться методами статистического контроля и управления качеством продукции. Это также требует знания математики. В связи с этим становится ясным, какой опасностью чреваты попытки нарушить равновесие в обучении различным дисциплинам, особенно если это может лишить молодое поколение полновесного знакомства с математикой и ее методами — этим мощным орудием познания природы, технических и экономических процессов, а также управления современной оборонной техникой. Обучение и воспитание молодого человека требуют огромных усилий в самых разнообразных направлениях и, конечно, не могут быть сведены к усиленным занятиям только математикой, или физикой, или литературой, или искусством. Требуется гармоническое развитие личности, которое требует и хорошего теоретического воспитания, и воспитания любви к физическому труду, к эксперименту, к разного рода испытаниям. Но мало и этого. Нужно и физическое развитие, чтобы человек не отрывался от природы, от движения, от чувства владения не только своим разумом, но и телом. Я не мыслю себе гармонического воспитания без эстетического воспитания, без восприятия красоты окружающего нас мира, мира красок, звуков, формы. Литература и язык — мощные средства воспитания личности и характера. Без овладения ими не может быть и настоящего математика, хотя бы только потому, что, не владея в достаточной мере речью, невозможно передать другим свои мысли, свои концепции, свой метод изложения. А передать ведь нужно так, чтобы и другой перенял свойственную тебе увлеченность проблемой и внутреннюю уверенность в значимости предлагаемых тобой идей. А в этом отношении художественная и популярная литература являются незаменимыми помощниками.

Несомненно, что история родной страны учит любви к родине, а всеобщая история способна привить молодежи позиции интернационализма и должна позволить ей сделать первые шаги в ее открытии законов общественного развития. В школьные годы я с увлечением изучал историю самостоятельно и мое знакомство с ней выходило далеко за пределы теперешнего школьного курса. Точно так же много времени я уделял литературе, пытался писать стихи и прозаические произведения, однако нашел себя в математике, ее применениях к задачам естествознания, инженерного дела и организации производства, а также в исследовании вопросов истории и философии математики. Это совсем не означает, что мои увлечения историей и литературой пропали даром. Я убежден как раз в обратном, они внесли в формирование моего характера, так же как и музыка, много существенных черт. Точно так же хорошо организованные и проведенные уроки по математике позволяют формировать существенные черты характера молодых людей и их моральные принципы.

Конечно, использование уроков математики, как, впрочем, и уроков биологии, физики, химии, для воспитания патриотических чувств имеет меньше возможностей, чем — уроков истории родной страны и ее литературы. Скорее они способствуют интернациональному воспитанию, поскольку закономерности точных наук одни и те же в Москве, Лондоне и Токио. Однако на уроках математики учитель не только доказывает теоремы, которые одинаковы в Австралии, Китае и СССР, не только вводит абстрактные понятия и действия над ними, но он рассматривает и иллюстративные примеры, наполненные конкретным содержанием. Текстовые задачи содержат полезные сведения, относящиеся к территории страны, ее населению, производительным силам и пр. Учитель может рассказать об успехах школьников нашей страны на международных олимпиадах, о вкладе отечественных ученых в развитие математики и ее применений. Однако следует заметить, что при этом в патриотическом воспитании участвует не сама математика, а некоторые сопутствующие аспекты.

Народы нашей страны, населяющие ее огромную территорию, дали многое для прогресса математической науки. Действительно, в IX—XV вв. в Средней Азии были получены первоклассные результаты в области классической математики. Именно здесь зародилась алгебра как самостоятельная наука и возникло само слово алгебра. Хорошо известно, что в Древней Руси времен Ярослава Мудрого существовала широкая сеть общеобразовательных школ и по уровню просвещения она стояла далеко впереди многих западноевропейских стран того времени. Монгольское нашествие на столетия подорвало развитие просвещения и науки на всей территории нашей родины от восточных до западных ее границ. В ту пору ее граждане выполняли роль заслона от этого нашествия для всей Западной Европы. Потребовались усилия многих поколений, чтобы наш народ смог породить и воспитать таких титанов науки, как М. В. Ломоносов, Н. И. Лобачевский, П. Л. Чебышев, А. М. Ляпунов, Н. Е. Жуковский, и многих других, чьи труды прославили отечественную науку, решили сложнейшие проблемы и проложили для ее прогресса новые пути. Мы можем гордиться тем, что после Великой Октябрьской революции все народы нашей страны получили возможность участвовать в продвижении математической науки и выдвинули замечательных ученых, составляющих славу современной математики. Все это не может оставить равнодушными наших учеников, оно наполнит их сердца гордостью за страну и народ. Так что и преподавание математики не может пройти мимо воспитания патриотических чувств школьников.

Вспоминаю то ни с чем не сравнимое состояние гордости, которое я испытывал, когда узнавал на уроках и из прочитанных книг имена выдающихся соотечественников, открывших человечеству новые факты и законы. Какое огромное воздействие произвело на меня и моих сверстников знание того факта, что нашему соотечественнику Н. И. Лобачевскому удалось сказать решающее новое слово в геометрии, которое оказало сильнейшее влияние на формирование концепции строения природы. Но эти знания учили нас большему, а именно осознанию того, что таланты имеются в каждом народе и для того чтобы они раскрылись, необходимы соответствующие социальные, материальные и культурные условия. Если же этих условий нет, то способности и таланты погибают, как это неоднократно случалось в царской России. Эти знания заставляли нас мечтать и о том времени, когда мы сами сможем дать науке, стране, народу что-то свое, полезное и ценное. Это означало еще один шаг в формировании национальной гордости и одновременно интернационализма.

Но для того чтобы воспитать высокие моральные качества у учащихся, для того чтобы сделать их горячими патриотами, абсолютно необходимо, чтобы сам учитель следовал неуклонно высоким моральным принципам, глубоко любил свою Родину и показывал бы это своими делами, а не заменял все это произнесением высокопарных слов.

Вопросы воспитания моральных ценностей и патриотизма на уроках математики разработаны еще недостаточно, но это совсем не означает, что математика полностью лишена возможностей внести свой вклад в эти важные аспекты воспитания советского гражданина.

§ 2. Реформа образования — необходимый элемент общественного прогресса

Образование не может оставаться на месте и ежегодно лишь повторять образцы прошлых лет. Общественный прогресс требует изменения содержания образования, с тем, чтобы школа давала подготовку молодым людям в тех направлениях, которые особенно важны для страны и ее прогресса. Во времена Петра I не было ни авиации, ни железных дорог, ни паровых машин, ни тракторов, ни автомобилей. Теперь в распоряжении страны все это имеется, так же как и многое другое. Всем этим нужно управлять, поэтому — можно ли оставлять в наши дни молодое поколение на том же уровне развития, на каком оно находилось в начале XVIII века? Конечно, это слишком грубый пример, но прогресс происходит непрерывно и необходимо своевременно «подправлять» образование так, чтобы оно в лучшей мере удовлетворяло требованиям времени. Эти вопросы были подняты, в частности, на июньском Пленуме ЦК КПСС 1983 года. Реформа школы — это большая и крайне необходимая мера, которая должна решать вопросы не столько сближения содержания школьного обучения с состоянием соответствующей науки (хотя важно и это), сколько сближения всей направленности школьной жизни с общественными нуждами и потребностями. И это следует делать не столько для решения сиюминутных срочных задач, сколько для учета долголетней перспективы. Эти соображения касаются не только духа обучения и воспитания, но и содержания образования.

Естественно, что каждая эпоха заставляет ставить свои акценты на вопросах обучения и воспитания, постоянно пересматривать содержание обучения, приводя его, как мы только что сказали, в соответствие с научными взглядами и требованиями практики. Никому не придет в голову теперь учить математике так, как это делали, допустим, во времена Н. И. Лобачевского и М. В. Остроградского. Следует помнить, что жизнь быстро меняется, и за какие-нибудь тридцать — сорок лет во все области науки и прикладной деятельности вторглись вычислительные машины, в том числе и малые. Скоро каждая хозяйка станет брать с собой в магазин микрокалькулятор, а логарифмическая линейка станет синонимом далекого прошлого. Можно ли при этом продолжать обучение математике по-старому и не замечать этого нового, властно вторгающегося в нашу жизнь? Очевидно, что нам придется пересмотреть наши педагогические взгляды и на обучение таблице умножения, и на приобретение навыков пользования таблицами логарифмов или других функций.

Но это только одно направление прогресса науки и техники. Мы не можем забывать, что почти всем мальчикам придется служить в армии и требования современной военной техники к математическим знаниям очень велики. В артиллерии, ракетных войсках, авиации, частях связи и ряде других без свободного владения широким диапазоном математических средств обойтись уже нельзя. Страна, заботящаяся о своей обороне, нуждается в хорошем и современно поставленном математическом образовании. Нельзя забывать и промышленность, в которую математические методы вошли в качестве важной составной части. В третьей главе мы рассмотрим отдельные задачи, которые были выдвинуты производством и получили решение на том уровне, который в ту пору требовался. Здесь полезно отметить, что математика необходима не только инженерно-техническому персоналу, но и широкому контингенту лиц, работающих непосредственно на рабочих местах. Естественно, что аналогичное положение имеет место и в других дисциплинах — физике, химии и др.

На апрельском Пленуме ЦК КПСС 1984 г. были сказаны очень важные слова:

«Сейчас внимание советских людей приковывает реформа школы. Это вопрос огромного общеполитического значения, что, собственно, и побудило нас поставить его на Пленуме ЦК.

Чтобы советское общество уверенно двигалось вперед, к нашим великим целям, каждое новое поколение должно подниматься на более высокий уровень образованности и общей культуры, профессиональной квалификации и гражданской активности. Таков, можно сказать, закон социального прогресса.

В условиях научно-технической революции, лавинообразного роста информации этот закон предъявляет небывало высокие требования и к тем, кто учится, и к тем, кто учит,— от рядового педагога до министра. Реформа и призвана создать все необходимые предпосылки для выполнения этих требований. И, разумеется, устранить имеющиеся недостатки в сфере просвещения, в том числе и в руководстве ею» («Коммунист», 1984, № 6, с. 33).

Понятно, что большое внимание должно быть уделено формированию представлений о месте преподаваемой дисциплины в реальной жизни. Ни в коем случае нельзя внушать учащимся той мысли, что обучение в школе не является трудом и при том трудом общественно полезным. К сожалению, это делается — и делается систематически, когда внушается мысль, что при сборе макулатуры и металлолома школьники заняты общественно полезным трудом, но когда они напряженно занимаются, то это их личное дело. Так по крайней мере слова об общественно полезном труде преломляются в сознании значительной части школьников. Необходимо внушать с первого класса убежденность в том, что учение тоже труд и притом труд общественно полезный, поскольку впоследствии знания, полученные в школе, будут использованы на работе в учреждении, школе, на заводе или при охране границы.

Следует помнить мысль, высказанную на Пленуме ЦК КПСС: «Реформа школы — не одноразовое мероприятие. И дело не только в том, что она рассчитана на две пятилетки. Когда речь идет о живых людях, а тем более о детях, нельзя все расписать наперед. Практика, безусловно, будет вносить поправки в какие-то наши наметки и планы, и бояться этого не следует. Важно не потерять из виду наш стратегический ориентир — формирование всесторонне развитой личности» («Коммунист», 1984, № 6, с. 33)

Среди всех школьных учебных предметов мне хотелось бы сейчас затронуть только один, я имею в виду иностранные языки. Широко распространено выражение, что человек живет столько жизней, сколько он знает языков. Однако подавляющее большинство наших сограждан владеют только одним — своим родным. А ведь теперь сотни тысяч наших квалифицированных рабочих, инженеров, преподавателей, врачей и других специалистов направляются в зарубежные страны на кратковременную и на длительную работу. Им необходимо не только прочесть краткое объявление, но и общаться на языке данной страны с коллегами, обсуждать с ними специальные и общие вопросы. Эффекта непосредственного общения не может заменить даже самый квалифицированный переводчик. А ведь нередко оказывается, что при переводе специальной информации лицо с общим языковым образованием оказывается настоящим профаном. Я вспоминаю, какой «ужас» излагался в интерпретации переводчика на одной из конференций по вычислительной технике при переводе с немецкого языка. И это не вина переводчика, поскольку он превосходно знал обычные немецкий и русский, но специфическая терминология приводила его к неизбежным промахам. Хотелось бы, чтобы эти слова были поняты не как упрек в адрес переводчика, а как указание на необходимость большому числу лиц активно овладевать иностранными языками.

Современная научная информация — математическая, педагогическая, медицинская, техническая — излагается далеко не только на русском языке. Сотням тысяч (если не миллионам) специалистов необходимо с ней знакомиться и свободно читать монографическую и журнальную литературу. В свое время после гимназии В. И. Ленин получил возможность читать на английском, немецком и французском языках, и знание ряда иностранных языков сослужило ему прекрасную службу.

Теперь, в период осуществления реформы школьного образования, нельзя оставить в забвении преподавание иностранных языков. Нужно позаботиться о том, чтобы после окончания школы выпускники приобретали действительное знание языка, а не убежденность в том, что они начисто лишены способности его изучать.

В шестидесятые годы идея необходимости перестройки школьного математического образования охватила ряд стран всех континентов. Над этими проблемами работали в Бельгии, Франции, ФРГ, ГДР, Англии, Италии, Польше, Югославии, Японии, США, Австралии, Новой Зеландии и многих других странах. Не обошла реформа и нашу страну. Появились многочисленные учебники, написанные с новых математических и методических позиций. Основная черта, которая роднила разные группы реформаторов, состояла в том, что содержание школьного математического образования, как они считали, резко разошлось с содержанием современной математической науки и назрела необходимость их сблизить. Это сближение подавляющим большинством разработанных проектов предлагалось осуществить на базе теории множеств, являющейся базой современной математики с начала нашего века.

К сожалению, был допущен некоторый перекос в этом отношении за счет необходимых классических частей курса. Во всех странах отмечали, что одним из последствий реформы было снижение таких навыков школьников, как выполнение тождественных преобразований, арифметических вычислений, снижение уровня пространственных представлений. Были нарушены нормы психологического характера, и школьники зачастую вместо сознательного познавательного процесса ограничивались простым заучиванием без понимания существа дела.

Процесс перестройки школьного математического образования затрагивает интересы миллионов и очень сложен. К нему следует относиться с величайшей осторожностью, помня, что у молодого поколения он оставляет отпечаток на всю жизнь. Важно, чтобы реформаторы математического образования глубоко продумывали не только формальную сторону содержания образования, но и последствия перестройки. При этом ни на минуту нельзя забывать и того, что общее образование необходимо всем, а крупными специалистами в каждой данной области будут лишь единицы. Математические знания необходимы всем, но математиками станут лишь немногие. Точно так же физиками, географами, историками, лингвистами станут немногие, но основы знаний этих дисциплин понадобятся всем. Мы должны помнить в первую очередь о нуждах всех, а не только тех, кто впоследствии станет участвовать в прогрессе физики, математики, истории или литературы. Вот почему реформа школьного образования должна исходить из интересов всех, а не только из потребностей ничтожной доли — тех, кто впоследствии станет продвигать науку.

Перестройка не должна нарушать также распределение времени и усилий учащихся между школьными дисциплинами. Кроме того, содержание реформированных курсов по математике должно быть доступно учащимся, в них не должно быть злоупотреблений терминологического характера. Каждый новый термин не сразу укладывается в сознании. Над ним следует поработать, прежде чем он станет привычным и станет рабочим инструментом познания. К сожалению, авторы учебных пособий далеко не всегда следуют этому правилу и новые термины вводят буквально десятками. Конечно, при таком ливне понятий и терминов они не усваиваются и психика многих учащихся травмируется. В сознании учащихся должны быть зафиксированы основные понятия и связанные с ними закономерности, а также концепция науки, ее назначение и, само собой разумеется, умение самостоятельно пользоваться этими закономерностями в доступных им ситуациях.

Мне приходилось беседовать с рядом французских, японских, английских и новозеландских педагогов по поводу проведенной в шестидесятых годах перестройки системы математического образования. Все они высказывали мнение, что реформа назрела, но не во всех деталях оказалась успешной. В частности, были переоценены возможности школьников усвоить активно и сознательно большое число вводимых понятий в достаточно формализованном курсе математики. Зачастую инициаторы реформ стремились учитывать лишь свои идеи и не прислушивались к голосам рядовых педагогов. Кроме того, в подавляющем большинстве проектов игнорировались интересы практики. В результате пришлось вносить в предложенные программы существенные упрощения и изменения.

Опыт реформы математического образования в нашей стране также оказался не безупречным, хотя авторами реформ были высказаны многие интересные идеи. В частности, изложение геометрии базировалось на попытке приблизить содержание геометрического образования к потребностям физики. Изложение математических сведений в первые шесть лет обучения также подверглось существенному изменению и во многих отношениях улучшению. Однако не были учтены многие чисто педагогические и психологические аспекты. В частности, была использована новая, не совсем оправданная терминология, давались усложненные формулировки определений и результатов, уделялось недостаточное внимание связям теории с практикой применений. Это было необходимо исправлять вдумчивой последовательной работой совместно с опытными педагогами.

Как мне представляется, в перечне итогов проведенной в нашей стране перестройки школьного курса математики не были упомянуты некоторые ее положительные стороны. А ведь утвержденные ныне программы школьного математического обучения, на мой взгляд, фактически основаны на тех, что были предложены А. Н. Колмогоровым и его соавторами. Убежден, что положительные моменты преобразований, предложенных А. Н. Колмогоровым, найдут свое место и в новой реформе школьного обучения.

Важно, чтобы при проведении реформы были учтены положительные стороны уже проделанного и не повторены ошибки прошлого. Для этого необходимо выработать некоторые принципы, которых следует твердо придерживаться.

Во-первых, при определении содержания программы нужно, на мой взгляд, исходить из требований, которые предъявляет к математическим знаниям учащихся практика во всей ее широте. Здесь следует учесть требования и промышленного производства, и военного дела, и сельского хозяйства, и социального переустройства и многие другие. Их необходимо систематически собирать и изучать.

Какие математические знания потребуются современному солдату? Какие знания нужны рабочему современного производства в области геометрии, вычислительного искусства (включая пользование ЭВМ), логики рассуждений? Что необходимо при изучении физики, химии, биологии, производственных дисциплин? При этом не следует полагаться на широту кругозора одного специалиста, каким бы крупным и разносторонним он ни был. Быть может, для сбора необходимого материала следовало бы разослать анкеты.

В связи с тем, что для артиллерии, ракетной техники очень важны элементы теории вероятностей, они, быть может, должны быть введены в курс. Поскольку проблемы испытаний, контроля качества и управления качеством в процессе производства нуждаются в статистических сведениях, возможно, элементы статистических знаний должны быть в общем курсе математики. Использование вычислительной техники обязано присутствовать в современном школьном курсе математики. Я не пытаюсь предварять содержание будущей программы, а только начинаю обсуждение. Такое обсуждение ни в коем случае не должно ущемить и интересы самой школы. Создание программы математического образования является делом государственной важности и именно поэтому оно должно быть особенно внимательно и всесторонне обсуждено. Здесь мнения одной (даже самой авторитетной) научной организации совершенно недостаточно.

Во-вторых, при составлении программы должны быть учтены возрастные и психологические особенности учащихся, их возможности усвоения содержания обучения. Здесь не обойтись без участия широкой педагогической общественности. Кто-кто, а педагоги лучше кого бы то ни было представляют себе, что́ способна усвоить за определенный срок основная масса школьников данного возраста.

В-третьих, содержание математического образования должно быть согласовано с методологическим воспитанием. Для этого должны быть продуманы примеры применений, разобранные со всей полнотой, указания на возможные области применения, исторические замечания, связи с другими предметами, тщательно изложенные выводы об истоках математических знаний.

В-четвертых, массовый преподаватель должен стать союзником реформы, а не безразличным ее участником. Именно учитель осуществляет в жизни разработанные идеи обучения. Если он не будет убежден в необходимости нового подхода, то или фактически станет продолжать преподавание по-старому, или же не сумеет увлечь учеников новыми идеями и содержанием. К сожалению, в прошедшей реформе этому моменту уделялось недостаточное внимание и многие преподаватели были по меньшей мере безразличными исполнителями. Для преподавателей должны быть изданы брошюры, книги, сборники и своевременно написаны статьи о проводимой реформе. К ним дóлжно обратиться с просьбой высказать свои соображения по всем аспектам новой программы. Учебники же следует обсудить задолго до того, как преподавателям придется вести по ним преподавание.

В-пятых, учебники. За последние годы я наблюдал, в какой спешке зачастую они изготовляются и поэтому как неровно они изложены и как неравноценно распределены страницы при изложении материала. Нередко на второстепенный материал отводится гораздо больше места, чем на принципиально важные вопросы.

Мы должны думать об учащихся, проявляющих исключительные способности в том или ином учебном предмете. Стране крайне необходимы новаторы, в значительной степени определяющие скорость научно-технического прогресса. Это неоценимый капитал страны и он не может и не должен быть потерян. Наша задача состоит в том, чтобы обсудить и принять меры по сохранению и умножению этого капитала. Несомненно, что не все талантливые люди могут быть обнаружены еще в школе, но мы хорошо знаем, что увлеченность делом, способность находить оригинальные решения не проходит с годами.

§ 3. Учитель — ключевая фигура педагогического прогресса

Построение коммунистического общества предполагает в неменьшей степени, чем всестороннее удовлетворение материальных потребностей граждан, полноценное удовлетворение культурных нужд всего населения.

На июньском Пленуме ЦК КПСС (1983 г.) отмечалось: «У нас часто используется формула «повышение уровня жизни». Но ее порой трактуют упрощенно, имея в виду лишь рост доходов населения и производство предметов потребления. В действительности понятие уровня жизни гораздо шире и богаче. Тут и постоянный рост сознательности и культуры людей, включая культуру быта, поведения, и то, что я бы назвал культурой разумного потребления. Тут и образцовый общественный порядок, и здоровое, рациональное питание, тут и высокое качество обслуживания населения (с чем у нас, как известно, еще далеко не все благополучно). Тут и полноценное с нравственно-эстетической точки зрения использование свободного времени. Словом, все то, что в совокупности достойно именоваться социалистической цивилизованностью»*).

Сами по себе представления о полноценной жизни в сознание человека не приходят, их нужно воспитывать, прививать к ним вкус и потребность. В этом воспитании неоценима роль школьных учителей. Именно они, получив в свои руки шести-, семилетнего малыша, ведут его к взрослому состоянию, формируют интересы и потребности, отношение к культуре и труду, требовательность к себе и своим поступкам, широту общественных взглядов Воспитание человека будущего и его потребностей в значительной степени находятся в руках учителя, он участвует в создании идеалов поведения молодого поколения и для этой цели его собственные идеалы, а тем самым и представления о времяпрепровождении в свободные часы представляют исключительную важность.

Но для того чтобы учитель находился в гуще реальностей нашей жизни, он должен иметь досуг, иметь возможность читать журналы и книги, знакомиться с тем, чем живет представляемая им наука, какие достижения в ней появились за последние годы и что она позволила сделать для практической жизни нашей страны. Он должен быть в курсе сведений, публикуемых в молодежных журналах и в популярной литературе, так как иначе он не сможет ответить на вопросы учащихся и превратится из воспитателя молодежи, из человека, по которому она стремится равняться, в простого урокодателя. Иными словами учитель потеряет ту основную ценность, на которую рассчитывает общество: учитель должен быть способен и по своим знаниям, и по своим умениям вести за собой молодежь, быть для нее идеалом, наставником, консультантом. К сожалению, в ряде мест на учителя смотрят как на лицо, на которое можно свалить всю работу, в том числе ему и неприсущую. О ценности учителя, об его педагогическом таланте мы должны судить не по количеству посещенных им заседаний, не по тоннам бумажной макулатуры, собранной его учениками, а главным образом по тому, какие характеры ему удалось воспитать, какой нравственный дух ему удалось посеять в своих учениках, как он научил их учиться, ценить красоту и самостоятельность в работе.

---

*) «Материалы Пленума ЦК КПСС (14—15 июня 1983 г.)». М., Политиздат, 1983, с. 13.

Примерно об этом же было хорошо сказано в передовой статье газеты «Известия»: «Творческий, думающий, увлеченный своим делом педагог свято чтит великий завет великого Ушинского: учитель перестает быть учителем, если постоянно не учится сам. В наше время это звучит особенно актуально — научно-технический прогресс быстро меняет содержание знаний. Усложняются и требования к воспитательному потенциалу учителя, его умению идейно, нравственно, всей своей личностью воздействовать на учеников. Вот почему хороший учитель стремится непрерывно совершенствоваться»*).

В той же статье сказаны следующие правильные слова: «Если еще не так давно главную часть знаний дети получали в школе, от учителя, то сегодня его с успехом дополняют и учебная программа телевидения, и обучающая техника, и разнообразная литература. Но только учителю дано переплавить знание в убеждение, придать ему силу нравственного воздействия. Вот почему личные свойства учителя, его собственный образ жизни, его каждодневное поведение, включая досуг, приобретают все большее и большее значение».

Особенно важно срочно подумать о том, чтобы разгрузить преподавателя от множества обязанностей, не связанных с его основным делом — образованием и воспитанием молодежи,— которому он должен посвятить все свои мысли, все свое время. Мы никак не должны забывать о том, что в руки педагога мы отдаем самое ценное, что у нас есть,— наших детей, наше будущее. И именно поэтому мы должны заботиться о педагоге и его времени, о том, чтобы он смог лучше подготовиться к общению с детьми, чтобы он был в курсе политических, научных и педагогических событий, чтобы у него было время подумать о том, как лучше выполнить свой долг учителя.

Процесс обучения основам наук является важным средством приобщения к производительному труду; это основа приобщения к пониманию технологических процессов и выбора оптимальных решений, а также использования статистических методов управления качеством промышленной продукции.

Очень хорошо, если учащиеся наряду с приобретением сведений по основам естественных и гуманитарных наук ознакомятся также с элементами производственного труда и будут участвовать в производстве материальных ценностей. Но здесь требуется сделать так, чтобы школьники воспринимали лучшие традиции рабочего класса — стремление работать с полной отдачей сил и выпускать продукцию только высокого качества. Ни в коем случае нельзя допускать, чтобы со школьных лет молодые люди привыкали к тому, что в школе и на производстве можно получить удовлетворительную оценку без полноценной работы. Ни

---

*) «Известия» от 19 июля 1983 г.

обществу, ни самому ученику не нужны «тройки» в аттестате, если в действительности знания и умения этого ученика заслуживают лишь «двойки». И здесь я говорю не только о теоретических дисциплинах, но и о навыках производственного характера. Производственное обучение, в результате которого ученик не выполнит ни одной работы, которую можно пустить в дело, нужно считать потерянным временем.

Как важно, чтобы каждый из наших детей и внуков мог впоследствии сказать о своем учителе: «Учитель постепенно открывал нам неведомый мир, и после его открытий жизнь становилась удивительной, почти сказочной. Обычные вещи он умел повернуть такой неожиданной гранью, что они сразу менялись и обретали новое значение» (Ю. Яковлев, «Учитель»). Все дело в том, что Учитель учит не только своему предмету, он учит жизни, отношению к труду, к людям, определению человеком его места в обществе — он воспитывает мировоззрение.

Хорошим учителем становятся не сразу, мастерство приходит в результате длительной и напряженной работы над собой, над своим отношением к людям и их недостаткам, над своими характером и речью. Учитель должен воспитывать в себе умение говорить спокойно, без раздражения даже в тех случаях, когда он не только раздражен, но и разгневан. Умение поставить себя выше личных чувств ради достижения высокой цели — воспитания и образования молодого поколения — нужно считать ценным качеством учителя. Как часто приходится в школе, классе сталкиваться с таким положением дел, когда школьники стремятся вывести учителя из душевного равновесия и довести его до раздражения. Нельзя идти у них на поводу, следует им показать, что Учитель выше этого, поскольку он видит дальше них и ставит интересы дела настолько высоко, что личное раздражение ничтожно по сравнению с преследуемыми им целями.

Школьники очень тонко чувствуют учителя, для которого общение с ними является радостью, и отличают его от урокодателя, к которому радость приходит лишь с окончанием урока. Первый всегда находит приветливые, ободряющие слова, как для ученика, увлеченного математикой, так и для ученика, который с трудом справляется с заданиями, а также для середнячка, который усердно справляется с работой, но не проявляет ни увлечения, ни любви к предмету. Сильный учащийся должен после общения с учителем почувствовать, что ему верят, надеются на его силы и уверены в его больших внутренних возможностях. Ему нужно внушить мысль о том, что он способен не только познать уже созданное, но и сам участвовать в создании нового, необходимого для прогресса наших знаний и что для этого следует тренировать свои способности на решении трудных, нестандартных задач. Слабый школьник от общения с учителем должен получить заряд бодрости и уверенности в том, что он может справиться успешно с курсом школы, но для этого он должен только научиться учиться, еще раз попытаться понять основные определения, вникнуть в доказательства, разобраться в смысле доказательств и в подходах к решению стандартных задач. Он должен почувствовать, что на него не махнули рукой, а в его возможности верят. Как часто бывает, что слабый ученик слаб не потому, что он не способен справиться с курсом, а потому, что он запустил основы, не вник в необходимые понятия, не привык самостоятельно размышлять и доводить до конца начатые рассуждения. Наконец середняк также нуждается в теплых словах учителя. Он — потенциальный увлеченный учащийся, способный на многое, но одновременно он может превратиться в безразличного бездельника. Тепло слов учителя способно сделать чудеса, влить чувство уверенности в вечно колеблющегося и неуверенного в себе школьника. Помочь найти себя, свои интересы, свои способности и увлечения каждому из учащихся — это идеал труда учителя.

Конечно, почти в каждом классе есть ученики, которые попросту не желают учиться, не следят за объяснениями в классе и не желают выполнять учебные задания. Они саботируют свои ученические обязанности и считают, что этим они утверждают себя как выдающуюся личность в ученическом коллективе. Такие школьники нередко грубы с учителем или же подчеркнуто любезны с ним. Беседовать с такими трудными учащимися лучше всего с глазу на глаз и не только о их плохом поведении, но и о том, что́ могло бы создать им настоящий авторитет в глазах класса, упомянуть о потенциальных их возможностях и теряемых способностях. Ведь нередко именно ошибочно понимаемая и воплощаемая в жизнь жажда «славы» приводит их к показному плохому поведению и нежеланию учиться. Но ни в коем случае нельзя выставлять положительные оценки за незнание и полное отсутствие потребности в работе. Мы должны помнить о том, что получение незаслуженных положительных оценок воспитывает привычку получать нечто за ничто. Впоследствии это будет перенесено и в повседневную жизнь: они станут требовать на работе, чтобы им приписали что-то, чего они не делали. Мы не можем в школе воспитывать привычку беспечно прожить за чужой счет.

Не может быть преподавателя, который мог бы превосходно справляться со своими многосторонними обязанностями без вдохновения, без внутреннего увлечения, без чувства внутренней убежденности в том, что он делает необходимое обществу дело, помогает формировать характеры и стремления, что он вводит учащихся в предстоящую жизнь и передает им в руки орудие огромной ценности — математику как метод познания, как орудие расчета, как средство научиться логически мыслить. Без такого внутреннего убеждения учителю не удастся процесс познания превратить в интеллектуальный праздник для учащихся, в необходимую и одновременно увлекательную часть всего обучения.

Без этого учитель не сможет оказывать решающее воздействие на характер учащихся, на их устремления, на их личности. С какой любовью и уважением вспоминал крупный советский историк математики и механики И. Б. Погребысский своего школьного учителя, который сумел вселить в него стремление к познанию, внутреннюю необходимость доводить начатое дело до конца, всякую идею доводить до понимания, а не до запоминания. Погребысский рассказывал, что именно в школьные годы учитель внушил ему мысль, что знание каждого иностранного языка помогает человеку как бы прожить еще одну жизнь. Про него можно сказать, что он прожил еще по меньшей мере шесть жизней, поскольку в совершенстве овладел английским, французским, немецким, итальянским, польским и чешским языками. Вдобавок он был прекрасно начитан в философии, истории, не говоря уже об его основной специальности — гидродинамике.

Влечение к познанию, стремление к постоянному совершенствованию способен передать только тот учитель, который сам обладает этими стремлениями, который с уважением относится к своим ученикам и искренне желает передать им свою влюбленность в математику, ее неограниченные возможности для познания окружающего нас мира и для прикладных целей, а также умение учиться и применять полученные знания к делу. Такой учитель может и должен показать, что только те знания имеют цену, которые стали частью сознания учащегося, а не зазубрены бездумно, которые он не только может передать другому, но и использовать по мере надобности.

Математика даже от очень способных людей требует сосредоточенности внимания и привычки к преодолению трудностей. Приобретение такой привычки воспитывает характер подростка, он начинает понимать, что в преодолении трудностей содержится то, что придает особую увлекательность его деятельности. Одновременно появляется чувство гордости, поскольку он преодолел эти трудности, а не спасовал перед ними: ему удалось преодолеть в себе робость перед неизвестным и сложным и тем самым одержать важную для себя победу. Если учителю удалось воспитать в ученике такие качества, то это означает, что он добился крупного успеха и заложил фундамент для формирования крепкого характера, который справится в жизни с любыми сложностями, сумеет преодолеть все затруднения при самостоятельном познании и при решении тех проблем, которые поставит перед ним жизнь.

Сказанное можно трактовать и так: настоящий учитель не может быть равнодушным исполнителем, который безразличен к судьбам своих учеников. Он необходимо должен стремиться к тому, чтобы процесс обучения для учащихся стал желанным, чтобы умственные усилия приносили им не раздражение, а радость. Познание должно поднимать сознание учащегося, давать ощущение, что он приобретает новые силы и возможности для понимания мира, в котором живет. Окрылять учащегося, а не подавлять многообразием и безграничностью познания должно школьное обучение. Учитель обязан показать, что именно знание дает ту силу, которая позволяет обществу двигаться по пути прогресса, и что им, учащимся, придется в будущем самим нести ответственность за этот прогресс. В этом прекрасном и ответственном деле — воспитании из сегодняшних мальчиков и девочек будущих творцов, способных на решение проблем большого масштаба и на решительную смену методов познания — исключительно велика роль учителя, в том числе и учителя математики.

Важно, очень важно, чтобы в школах было как можно больше увлеченных, знающих и умеющих учителей, чтобы они воспитывали юношество в духе поиска нового, ответственности за порученное дело, стремления к познанию. К сожалению, в школах имеется еще некоторая доля преподавателей, которые не испытывают влечения к своей профессии, любви к учащимся. Для них самих проведение занятий в классе является чем-то вроде наказания. Такие преподаватели равнодушны к судьбе ученика и излагаемому ими предмету. Они не только не ищут, но даже не желают искать путей, которые позволили бы вызвать интерес класса к предмету, не пытаются перекинуть мостков от излагаемого материала к задачам практики, к событиям, которые волнуют общество. Для них формальное выполнение учебных планов несравненно важнее, чем пробуждение интереса учащихся к предмету занятий, чем установление связей между математикой и другими предметами — физикой, химией, географией, биологией, социальными дисциплинами. Они не ищут путей к сердцам школьников, не пытаются вдохновить их на процесс познания, а по-чиновному, бюрократически стремятся заставить их выполнять хотя бы чисто формально ученические обязанности. Этого школе и стране вовсе не требуется, этим не воспитаешь пытливых молодых людей, которые стремятся творить и делать лучше, чем умели до них. Такое воспитание для научно-технического прогресса является ничем иным, как самоубийством.

Для прогресса страны, для развития науки и производства нам крайне необходимо развивать у всей молодежи творческую жилку. Без школы и педагога осуществить такое воспитание невозможно. В прошлом веке, после победоносного окончания франко-прусской войны прусский канцлер Бисмарк заявил во всеуслышание, что войну выиграл не солдат, а школьный учитель. В современном бурном научно-техническом прогрессе нашей стране необходимо завоевать самые передовые позиции. Нам необходимо развивать массовое изобретательство, пробудить массовую рационализаторскую мысль, продвинуться в изучении законов природы и их использования в практических целях. Нам нужно, чтобы на всех ступенях математика становилась орудием познания и поиска оптимальных решений. Осуществить это без школьного учителя немыслимо. Его роль в научно-техническом прогрессе переоценить невозможно.

Сказанное показывает, как важно поднять престиж преподавательской профессии, чтобы привлечь к ней талантливую молодежь; как необходимо для общества вызвать стремление у молодежи пойти в педагогические учебные заведения и посвятить себя высокой учительской профессии. В решениях ЦК КПСС и апрельской сессии Верховного Совета СССР 1984 года принят ряд важных решений именно в этом направлении. Но их необходимо подкрепить всенародным вниманием к учителю. Нужно сделать так, чтобы в каждой семье было уважительное отношение к преподавателю, который растит детей, приобщает их к добру, труду, знанию, творчеству, гражданственности. Это окажет ни с чем не сравнимое воздействие на старших школьников при выборе профессии на всю жизнь.

В. И. Ленин в вопросах воспитания и образования подрастающего поколения придавал учителю решающую роль. В его известном письме «Ученикам каприйской школы», написанном 17 (30) августа 1909 года, содержатся следующие строки: «Во всякой школе самое важное — идейно-политическое направление лекций. Чем определяется это направление? Всецело и исключительно составом лекторов. Вы прекрасно понимаете, товарищи, что всякий «контроль», всякое «руководство», всякие «программы», «уставы» и проч., все это — звук пустой по отношению к составу лекторов. Никакой контроль, никакие программы и т. д. абсолютно не в состоянии изменить того направления занятий, которое определяется составом лекторов»*) . Эта оценка значения педагогического персонала, его идеологической и специальной подготовки легла в основу политики советского государства в деле воспитания советского учителя.

Постановления ЦК КПСС и Совета Министров СССР вновь и вновь возвращают нас к этим вопросам. В 1984 г. опубликовано постановление «О мерах по совершенствованию подготовки, повышению квалификации педагогических кадров системы просвещения и профессионально-технического образования и улучшению условий их труда и быта». В нем имеется ряд моментов, на которых хотелось бы остановить здесь внимание. С этой целью позволю себе привести оттуда довольно большую выдержку: «... обеспечить совершенствование подготовки и повышение квалификации педагогических кадров в соответствии с решениями июньского (1983 года) Пленума ЦК КПСС и Основными направлениями реформы общеобразовательной и профессиональной школы;

сосредоточить усилия педагогических коллективов, партийных организаций высших и средних специальных учебных заведений, готовящих кадры для системы народного и профессионально-технического образования, на всемерном повышении уровня идейной и профессиональной подготовки специалистов, воспитывать

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т 47, с. 194.

их активными проводниками политики партии, людьми высокого гражданского долга, трудолюбия, нравственной чистоты, широкой эрудиции и культуры».

Бесспорно, оберегать нужно время не только студента, но и педагога, чтобы он мог непрерывно совершенствовать свои знания, повышать свой общекультурный и профессиональный уровень. Этот вывод напрашивается сам собой из всех последних постановлений, касающихся труда преподавателя. Для этого, в частности, следует уменьшить бумажную отчетность и судить о работе учителя не по тому, как он пишет отчеты о проделанной работе, а по тому, какие знания, умения и нравственные навыки прививает он своим ученикам.

Несомненно, что на пробуждение интереса к учительской профессии окажет и постановление ЦК КПСС, Совета Министров СССР и ВЦСПС «О повышении заработной платы учителей и других работников народного образования» (см.: «Правда» за 23 мая 1984 г.).

§ 4. О математическом образовании учителя математики

Идеалы математического образования на протяжении истории не оставались неизменными, а менялись от одного исторического периода к другому в зависимости от тех задач, которые выдвигало общество к математическим знаниям и умениям своих граждан. Мы здесь не ставим перед собой задачи выяснения той исторической картины, которая характеризует смену идеалов и изменение учебных программ, связанную с этим процессом. Нас не будет также занимать описание математико-педагогических идеалов, которые были за последние полтораста-двести лет, хотя это было бы весьма поучительно и принесло бы значительную пользу и в понимании современности. Нас будет интересовать лишь современное положение дел и вопросы математической подготовки учителя математики.

Современный период общественной истории характерен стремительным прогрессом научных знаний, быстрой сменой технических идей, широким использованием новых научных разработок в практической деятельности, математизацией не только науки, но и подавляющего большинства практических видов деятельности. Темпы развития науки и техники непрерывно увеличиваются, благодаря чему современный этап развития получил наименование научно-технической революции. Усложнение технических средств, используемых в повседневной жизни, на заводах, фабриках, строительстве и транспорте, несомненно упрощает труд физический и делает человека сильнее, но неизбежно приводит к возрастанию труда интеллектуального. Чтобы заменить человека на тяжелых и монотонных работах, придуманы роботы, но их нужно было при-думать и определить программу их работы, управлять их действиями и, когда в этом встретится необходимость, приводить их в рабочее состояние. На научную работу, на перспективные исследования, на стимулирование изобретательской деятельности общество отпускает значительную долю находящихся в его распоряжении материальных средств. При этом неизбежно увеличивается и доля населения, вовлеченного в исследовательскую деятельность. Углубленное гуманитарное и естественно-научное образование, умение ставить перед собой достойную цель и добиваться ее достижения, привычка к точному и скрупулезному логическому и количественному анализу ситуаций становятся необходимыми не одиночкам, а массам людей. Этот вывод мы только усилим, если заметим, что управление работой электростанции, автоматизированного цеха или предприятия, поиск неисправности в сложном техническом устройстве требуют высокой логической культуры и развитой способности аналитического мышления.

Отошло в прошлое то время, когда было возможно, получив в юности специальность и определенную сумму знаний и навыков, пройти с ними через всю жизнь. Теперь и то и другое быстро устаревает и множеству людей приходится постоянно переучиваться. Более того, в наше время многие старые профессии умирают и им на смену появляются новые. Возникает острая необходимость в массовой переквалификации, в существенном, а иногда и коренном изменении профиля работы. Но, даже оставаясь на той же работе, мы постоянно должны переучиваться, и в этом перманентном переучивании математике отводится видное место. Из сказанного следует сделать очевидный вывод: мы должны так воспитывать молодежь, чтобы она была подготовлена к работе над собой, к чтению не только художественной, но и специальной научной и производственной литературы.

Необходимо отметить еще одно обстоятельство, непосредственно относящееся к математике, а тем самым и к повседневной деятельности учителя математики. Еще совсем недавно, каких нибудь сорок — пятьдесят лет назад, для математика были в сущности лишь два пути применения полученных знаний: с одной стороны, преподавание в средней школе, а с другой — научная работа в самой математике, совмещенная, как правило, с преподаванием в каком-либо высшем учебном заведении. Иные формы деятельности — служба в страховых учреждениях, на опытных сельскохозяйственных станциях, в разного рода лабораториях и непосредственно в промышленности — отнимали относительно ничтожную часть специалистов, окончивших физико-математические факультеты по отделению математики. В наше время положение резко изменилось. Круг деятельности математиков стал неизмеримо шире, прикладные возможности математических методов резко возросли. Появилось огромное число разного направления исследовательских организаций, где для работы требуются математики. И эти организации нередко заняты исследованиями не в традиционных областях знания, подобных астрономии, физике, страхованию, а разрабатывают проблемы медицины, биологии, строительства, инженерного дела, экономики, лингвистики. Традиционная работа девушек в качестве вычислительниц небывало расширилась, поскольку с появлением электронных вычислительных машин, управляющих и информационных автоматов нужда в математиках средней и высшей квалификации резко увеличилась. Появилась необходимость в массовой профессии программиста. Расширение возможностей вычислительной техники позволяет при планово-экономических или инженерных расчетах не ограничиваться рассмотрением одного или двух вариантов, а сравнивать десятки и даже сотни возможных вариантов и выбирать из них наилучший по тем или иным признакам. При этом возможности вычислительной техники вышли далеко за пределы собственно вычислительных операций. Те же универсальные вычислительные машины способны выполнять и чисто логические функции. Бурное развитие автоматизации производственных процессов стоит в самой непосредственной связи с тем, что на вычислительные машины оказалось возможным возложить функции сбора и обработки информации о состоянии и ходе производственного процесса. Все перечисленное показывает, что потребность в математиках, которая сейчас наблюдается во всем мире, является не временной и преходящей модой, но требованием эпохи, необходимым элементом общественного прогресса. Отсюда мы должны сделать тот вывод, что учить математике в наши дни чисто формально уже нельзя, а нужно постоянно демонстрировать место и значение математических методов в современной жизни, в практической и исследовательской практике.

Успехи науки, неизмеримо раздвинувшие возможности техники, позволили нашим современникам выдвинуть дерзкие гипотезы и осуществить смелые намерения. На очереди полет человека на другие планеты, организация астрономической обсерватории на Луне, проникновение в тайны высшей нервной деятельности, превращение пустынь в цветущие сады, передача утомительных и опасных работ автоматам. Все это не бесплодные мечтания, а замыслы, начало осуществления которых закладывается в наши дни. Претворять их в жизнь придется тем, кто ходит сейчас в школу. Школьники должны как можно раньше узнавать о проблемах, стоящих перед наукой наших дней; о вопросах, которые выдвигает практика промышленности, строительства, сельского хозяйства. Они должны чувствовать пульс интеллектуальной жизни страны. Многие из них узнают об этом несистематически, спонтанно, зачастую поверхностно и без проникновения в суть дела, но узнают. Из журналов и газет, из отрывков разговоров взрослых они узнают о роли математики в технике и естествознании. Они сравнивают услышанное с тем, что делается в классе, и, как правило, не замечают связи между содержанием курса школьной математики — таким формальным и абстрактным — и насыщенным идеями и фантазией кругом проблем современной техники, а также открытий науки. У учащихся возникает множество вопросов по самым неожиданным поводам. И если в прошлом учитель математики мог ожидать вопросы лишь по ограниченному кругу проблем, то теперь он находится в центре внимания, поскольку математика стала одним из основных и всеобщих средств исследования, позволяющих глубоко проникать в тайны вещей, и служит важным, а иногда и единственным орудием, направляющим работу экспериментатора.

От того, что и как ответит учитель, а также от того, будут ли поставлены ему эти вопросы, зависит успех воспитания будущего поколения, успех общественного прогресса, а также авторитет самого учителя. Ко всему этому следует подготовить учителя.

Сказанное заставляет задуматься над вопросом: каков же должен быть идеал современного учителя математики? Без такого идеала не может быть отчетливого представления о том, чему и как учить учителя, чему и как учить ученика. Я отдаю себе отчет в том, что мои представления в этом отношении ни для кого не обязательны, но я убежден в том, что назрело время создать подобный идеал и при воспитании будущих педагогов стремиться к тому, чтобы педагоги соответствовали задачам нашей эпохи и оказывали бы максимальное содействие воспитанию человека будущего. Будущее же потребует от членов общества в первую очередь привычки к систематическому напряженному труду, умения учиться, широких и глубоких знаний, способности четко и логически безупречно мыслить, жажды поисков лучших решений и ответственности за выполнение порученного дела.

Труд педагога исключительно важен для общества, он ведет детей к знанию, стимулирует развитие интереса к школьным учебным предметам. Именно он должен из них воспитать будущих граждан, строителей, ученых, врачей, будущих педагогов, рабочих, изобретателей и должен вселить в их сознание уважение к труду и презрение к безделию, умение мечтать и трезво мыслить. К сожалению, поразительно мало делается для того, чтобы показать важность, привлекательность, творческое содержание и общественную значимость учительского труда, заставляющего своих представителей каждый день находиться в интеллектуальном напряжении. Труд педагога ближе к труду артиста, музыканта, художника и поэта, чем к труду многих других прославленных профессий. Учителю ведь каждый день приходится иметь дело с десятками живых характеров, с их непрерывно меняющимися требованиями и увлечениями. Учителю каждый день приходится, подобно скульптору, лепить характеры, но только из материала куда более сложного, чем глина или мрамор. Этот «материал» активен и может, если его увлечь, помочь учителю, а может и оказывать серьезное сопротивление, если его не зажечь, не найти пути к его сердцу.

Нам очень важно привлекать внимание учащихся к преподавательскому труду, особенно способных и мыслящих, но на пути к этому лежит множество преград. В частности, старшие школьники видят только теневые стороны труда учителя — трудности управления классом, перегрузку, материальные трудности, непристойные выходки учеников (и, к сожалению, также родителей), которые наносят травму психике учителя. Творческое же начало учительского труда остается в тени. Как в этих условиях избрать себе на всю жизнь профессию учителя? Особенно при той необычайной широте возможностей, которые открываются перед каждым молодым человеком, ищущим применения своим способностям, жаждущим проявить себя. Было бы желательно систематически осуществлять в литературных произведениях, кинокартинах, театральных постановках показ педагогического труда с его светлых и высоких позиций. И показывать так, чтобы он стал желанным для нашей молодежи, чтобы его видели в качестве перспективной профессии.

Несомненно, что каждая профессия нуждается в людях, которые имеют к ней призвание, не мыслят свою жизнь вне ее и для которых безупречное выполнение профессиональных обязанностей является жизненной потребностью. Каждый успех в работе приносит им радость, а каждая неудача, даже если она замечена только ими самими, вызывает неистребимую потребность проанализировать ее причины и искать способы, которые позволяли бы полностью закрыть путь к ее повторению. Но для учителя призвание к профессии, пожалуй, особенно необходимо. В общении с учащимися, в проведении занятий с ними, в передаче полноценных знаний он видит смысл своей жизни, без чего она будет совершенно неполноценной. Учащиеся прекрасно чувствуют и видят, насколько радует учителя общение с ними, насколько ему интересно объяснять им новый материал и проверять домашние задания, в какой мере он интересуется ими как личностями, стремится выявить их призвание и развить их способности.

Уместно теперь сказать, что призвание является не только врожденным свойством человека, но и результатом воспитания, убеждения в необходимости и полезности своего труда, стремления добиться совершенства в избранной области деятельности. Без глубокой веры в общественную важность выполняемого дела, без стремления сделать его полнее и совершеннее не может быть и призвания. Но если человек чувствует, что дело ему удается и что окружающие довольны его работой, то появляются новые силы, возникает стремление работать еще лучше, вносить в труд свое особенное, позволяющее работать с еще большим успехом. Появляется мастерство и привычка к анализу действий, успехов и неудач, как собственных, так и чужих. Призвание без творчества, без постоянного напряженного труда и самосовершенствования, на мой взгляд, невозможно. Профессия педагога как раз требует всех этих качеств, поскольку преподаватель не может завтра поступать так же, как сегодня, и сегодня, как вчера. Ведь даже в одном и том же классе изменяется не только содержание обучения, но и его объект — учащиеся. Расширяется диапазон их интересов, увеличивается объем их знаний, появляются новые увлечения, а вместе с ними и новые запросы к учителю.

Естественно задать себе такой вопрос: «Слово «призвание» означает наличие природной склонности. Не означает ли это, что с призванием нужно родиться, воспитать же его невозможно?» Несомненно, что врожденные способности означают очень многое, но нужно помнить, что без соответствующей тренировки, без упорного труда по их развитию они хиреют и пропадают. Дарование же человека, подкрепленное трудом, знаниями и требовательностью к себе, позволяет добиваться поразительных результатов. В какой-то мере каждый человек обладает педагогическими способностями. Если их систематически воспитывать и любовно развивать, то они расцветают, становятся зримыми, начинают ощущаться как окружающими, так и самим их обладателем Без упорной же работы даже крупный талант способен погибнуть. Об его наличии владелец может даже не узнать, поскольку способности, талант, гениальность проявляются только в труде.

Педагогические способности необходимы не только педагогу. Руководитель предприятия, наставник на заводе, офицер — все нуждаются в умении педагогически правильно подойти к подчиненным, толково объяснить стоящую перед ними задачу.

Повторяю, я убежден, что хорошими педагогами не столько рождаются, сколько становятся. Но воспитание учителя является куда более сложным процессом, чем воспитание комбайнера или инженера Пожалуй, в полной мере это понято далеко не всеми. Ведь педагог не только должен хорошо знать свой предмет, он постоянно должен быть наготове и отвечать на множество неожиданных вопросов. Он должен уметь держать в напряжении мысль столь разно воспитанных, настроенных и подготовленных подростков, постоянно возбужденных и требующих активной деятельности. Учитель, любящий свое дело, не остается безразличным к предмету преподавания, к ученикам, к тому, чем они живут и о чем мечтают Более того, он сам стремится заронить в них искру любознательности, которая может разгореться в пламя увлечения познанием, поиском истины — математической, физической, биологической или иной. Если эта искра упадет на подходящую почву, то ученик станет самостоятельно читать, размышлять, развивать свои способности и пытливость. Какую бы специальность впоследствии он ни избрал, эти увлечения школьных дней не пропадут, а станут серьезной поддержкой в его дальнейшей практической работе, поскольку приучат его к самостоятельности, привьют веру в собственные силы, разовьют инициативу. Вполне возможно, что эти маленькие увлечения приучат ученика глубже вдумываться в прочитанное и заставят размышлять о непонятном, а не отмахиваться от него.

Учителю предстоит возбудить у учеников интерес к познанию, воспитать настойчивость в преодолении трудностей. Именно учитель может посеять у них веру в их собственные силы и убедить в увлекательности познания неизвестного, а также указать на обилие стоящих перед человечеством еще не решенных проблем. Познание должно стать для учащихся праздником, а не наказанием. В этом исключительно велика роль учителя.

Процесс обучения и формирования будущего учителя математики заслуживает пристального внимания и обсуждения. Не все, что делается сейчас в этом направлении, можно признать бесспорным и удовлетворительным. Прежде всего ясно, что от учителя математики требуется не только хорошее знание предмета, но и умение увлечь им учащихся, вызвать в них потребность своевременно готовиться к каждому уроку, вникать в суть понятий, добиваться в первую очередь понимания и только после этого — запоминания. Это огромное и прекрасное умение, которое необходимо развивать у студентов педагогических учебных заведений и педагогических отделений университетов. Известно большое число педагогов, которые умеют держать мысль практически всех учеников класса в напряжении и делают свой предмет настолько увлекательным, что многие учащиеся загораются мечтой стать математиками и затем действительно ими становятся. Сколько раз в университете мне приходилось сталкиваться с бывшими учениками из одного и того же класса, которых сумел воспитать их учитель в любви и увлечении математикой. Но, к сожалению, имеется еще немалое число учителей, которые не в состоянии пробудить не только любовь, но даже элементарный интерес к предмету. И если педагоги первого типа достигают успехов многими путями, то способы, которыми губятся интересы и способности учащихся, более или менее одинаковы — равнодушие самого педагога к судьбе учеников, к математике, ее преподаванию, а также его плохая научная и методическая подготовка. Перед нами задача огромного значения: как добиться того, чтобы большинство преподавателей математики стали мастерами своего дела, чтобы их нелегкая работа приносила радость и их ученикам, и им самим?

При ответе на этот вопрос в первую очередь нужно определить, чему и как следует обучать будущего педагога. Я считаю, что при обсуждении этого вопроса часто сталкиваются две противоположные позиции: 1) нужно дать хорошее математическое образование, и это основное; 2) необходимо дать хорошую общепедагогическую и методическую подготовку, и это самое главное. В действительности и та, и другая позиции ошибочны, поскольку нужно и то, и другое, причем лишенное формализма, наполненное глубоким внутренним содержанием. Ведь как можно хорошо преподавать предмет, если его знаешь и свободно владеешь материалом лишь от сих до сих? Авторитет преподавателя будет безнадежно подорван, когда учащиеся обнаружат, что его знания лишь немногим отличаются от того, что они должны усвоить сами. И здесь не помогут ни знание истории педагогики, ни знание частных методик. В то же время как можно добиться успеха, даже при хорошем знании предмета, если не имеешь подхода к ученикам, не можешь ясно и убедительно изложить суть предмета, доведя основные понятия и методы до полного понимания, увязав теоретические сведения с возможными практическими применениями? Тут не обойтись без методики и педагогики в их небюрократизированном понимании.

Но при этом математическое образование будущего педагога не может быть построено по той же схеме, что и математическое образование математика-исследователя или математика-программиста. Если от математика-исследователя требуется, помимо широкого математического образования, глубокое проникновение в какой-нибудь узкий ее раздел, то от математика-педагога требуется нечто иное. Прежде всего он должен представлять себе структуру современной математики в целом. Далее он должен хорошо представлять связи математики с другими науками и с практическими применениями. Он должен видеть в математике орудие познания и иметь значительный набор примеров, о которых может рассказать школьникам. Математические курсы для педагога должны быть построены так, чтобы, изучая их, он постоянно видел положение школьной математики в современном математическом содружестве, чтобы с высоких этажей математической науки он лучше оценил место и значение элементарной математики в современной науке. Широкое знание современных ветвей математики должно оказывать ему помощь при решении классических задач. Но этого мало. Его следует знакомить и с основными общефилософскими проблемами современной математики, с проблемами ее обоснования и с теми трудностями, которые при этом встречаются. Педагог обязательно должен быть знаком с историей своей науки. Для преподавателя математики это особенно важно, поскольку история математики дает огромные возможности пробуждения интереса учащихся к предмету, позволяет дать представление о формировании математических дисциплин, постановок задач и математических открытий. Преподавателю необходимо так воспринимать свою специальность, чтобы видеть, с одной стороны, основное содержание современной математики, с другой стороны, ее прикладные возможности, методологические проблемы и исторический процесс ее развития. Одного формального сообщения математических знаний по курсам анализа, алгебры, теории функций, теории вероятностей и др. недостаточно. Они должны возникать в сознании будущего педагога как результат естественного прогресса человеческих знаний, быть связаны с развитием физики, астрономии, экономики, биологии, инженерного дела. Будущий педагог должен ясно представлять, как в математике возникали новые направления исследований, формировались основные математические понятия, как и почему абстрактная наука находила и находит разносторонние применения в естествознании, социальных дисциплинах, инженерной и агрономической практике. Мы должны снабдить будущего учителя математики (еще на студенческой скамье) этими основными представлениями, чтобы впоследствии он мог этими знаниями и концепциями воспользоваться в практической работе. На мой взгляд, возникает необходимость серьезно перестроить структуру математических курсов, традиционные приемы их изложения и ввести в качестве обязательной дисциплины курс истории и методологии математики.

Возможно, следует ввести специальный курс «Математика в современном мире». Я убежден, что новый закон о школе обязательно вызовет такое обсуждение в Академии педагогических наук и Министерстве просвещения СССР.

Интересы преподавания накладывают определенные требования на характер курса истории математики для будущих педагогов: он должен содержать не только фактический материал, но и рассказы о развитии математических понятий, примеры, которые можно использовать в школьных занятиях, представление о преемственности ранних и более поздних разделов математики, а также связи развития математики с практическими нуждами людей.

Чтобы преподавать хорошо, нужно иметь в руках инициативу и, следовательно, некоторую свободу в проведении урока. Иногда важно затратить десять минут на беседу, которая касается проблемы, в данный момент волнующей школьников, и связать ее с курсом математики, с ее прикладными возможностями. Когда был запущен первый искусственный спутник Земли, то возбуждение школьников было таково, что не сказать об его запуске на уроке математики было бы крупной методической ошибкой. Во-первых, это событие давало богатый материал для разговора о практической силе математики, а во-вторых, позволяло показать научную и производственную мощь нашей страны, впервые в истории достигшей этого триумфа человеческого разума. Наконец, в педагогическом плане такая беседа крайне необходима, поскольку она позволяет связать текущие волнующие события с ролью науки, в частности математики, в современной жизни. Подобного рода беседа, проведенная удачно и возбудившая интерес учащихся, способна дать для школьного обучения несравненно больше, чем формально, без вдохновения и без показа перспектив проведенный урок.

Чтобы стать хорошим учителем, нужно развить в себе некоторые свойства. Среди этих свойств я хотел бы указать на следующие:

1) любить свое дело и быть им увлеченным, верить в его исключительную общественную ценность;

2) знать свой предмет, его историю и философские проблемы;

3) уметь излагать свой предмет увлеченно и интересно;

4) с уважением относиться к учащимся;

5) подобно тому, как талантливый артист, много десятков раз исполняющий некоторую роль, при каждом новом ее исполнении вновь и вновь переживает ситуации, в которые попадает герой, так и учитель математики, в сотый раз доказывая некоторую теорему, должен переживать радость открытия и передать эту радость учащимся;

6) видеть связи математики с практикой и уметь об этом рассказать вовремя, кратко и убедительно;

7) систематически следить за развитием науки;

8) не подавлять инициативу учащихся, а направлять ее;

9) уметь анализировать свои поступки, педагогические удачи и неудачи и тем самым обогащать свой опыт.

Успех педагога обеспечен тогда, когда он не только держит в памяти обширные сведения, но когда он усвоил их творчески. Об этом прекрасно было сказано А. Н. Колмогоровым: «От преподавателя не только в высшей, но и в средней школе требуется вовсе не только твердое знание преподаваемой науки. Действительно хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку. Вероятно, многие учащиеся средней школы знают, насколько увлекательной, а благодаря этому и легкой и доступной становится математика у таких преподавателей»*).

У каждого преподавателя бывают педагогические удачи, когда он отчетливо сознает, что урок прошел успешно. Но что сопутствует успеху? Что надо сделать, какую обстановку на уроке создать, чтобы удача приходила вновь и вновь и стала постоянной участницей встреч учителя с учениками? Хороший учитель стремится к этому и умеет это делать, учитывая (быть может, и подсознательно), психологические нюансы в настроении класса, что так существенно в работе педагога.

В связи с только что сказанным хотелось бы привести следующие слова В. И. Ленина, которые применимы и к работе учителя: «...не довольствоваться тем умением, которое выработал в нас прежний опыт, а идти непременно дальше, добиваться непременно большего, переходить непременно от более легких задач к более трудным»**).

К важным качествам хорошего педагога следует отнести разумную требовательность к знаниям и навыкам учащихся, которая приводит их к систематическим занятиям и уважению к пред-

---

*) Колмогоров А. Н. «О профессии математика». Изд-во «Советская наука», М. 1952, с. 3.

**) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 37, с. 196.

мету. Редко, но все же встречаются учителя, которые стремятся завоевать авторитет и любовь учащихся тем, что не требуют от них отчетливых знаний и понимания самой сути изучаемых вопросов. Однако этот прием приведет только к тому, что учащиеся перестанут стремиться вникать в существо предмета и привыкнут считать нормальным получение положительных оценок за неполноценные знания. В душе они будут скептически относиться и к необходимости знания предмета и к педагогу. Предмет заслуживает уважения ученика лишь тогда, когда на его изучение затрачен собственный труд ученика. Но требования к знаниям и навыкам учащихся не должны выходить за пределы, в которых велось преподавание. Если же с учащихся требуют больше, чем дают, то откуда учащимся взять эту добавку?

§ 5. Учебники и вспомогательная учебная литература

Нет сомнения в том, что учебник играет исключительно важную роль в деле обучения подрастающего поколения и создания привычки к чтению специальной литературы. В наше время второй аспект приобретает очень серьезное значение и его никак нельзя сбрасывать со счетов при оценке качества учебной литературы. От того, насколько хороши будут учебники, существенно зависит уровень усвоения учащимися содержания школьной программы и умение использовать теоретические знания при решении практических задач. От качества и направленности учебников зависит также развитие творческого подхода учащихся к возникающим перед ними вопросам. Теперь, более чем когда бы то ни было прежде, необходимо воспитывать молодое поколение в духе самостоятельного мышления, глубокого понимания научного подхода к природным и социальным явлениям. Таким образом, современному школьнику мало только доступного изложения определенного минимума знаний, который предусмотрен программой, но обязательно требуется еще воспитательное воздействие на совершенствование его научного мировоззрения. Вот почему так существенно, чтобы учебник не только последовательно излагал содержание предмета и приучал к использованию теоретического материала на практике, но и выполнял ответственную роль в воспитании научных взглядов учащихся на окружающий мир и на роль науки в его познании. Он должен внушать учащимся мысль о важности знания законов природы для жизни общества.

К сказанному естественно добавить следующие слова, произнесенные на Пленуме ЦК КПСС (апрель 1984 г.): «Сегодня весь учебный процесс должен в гораздо большей мере стать носителем мировоззренческого содержания. Разгружая учебные программы, создавая новые, толковые учебники, нельзя облегчать их идейно, снижать научный уровень преподавания. Призвание школы — формировать у учащихся марксистско-ленинскую убежденность, способность к самостоятельному творческому мышлению, развивать сознание своей ответственности за судьбы социалистической Родины. И, конечно, прививать стойкий иммунитет к чуждым нам взглядам и нравам» («Коммунист», № 6, 1984 г.).

На необходимость создания содержательных и полноценных учебников для школы партия и Советское правительство обращают пристальное внимание с первых дней Советской власти. Об этом же четко сказано в постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду» («Правда», 28.XII.1977 г.). Сейчас хотелось бы обратить внимание на следующие слова указанного постановления: «Школьные программы и учебники в ряде случаев перегружены излишней информацией и второстепенными материалами, что мешает выработке у учащихся навыков самостоятельной творческой работы».

Учебник необходим школьнику не только для лучшего усвоения материала, объясненного учителем в классе. Он нужен для справок, для повторения ранее пройденных разделов курса, а также для самостоятельного прохождения тех разделов курса, объяснения которых по тем или иным причинам учащийся не слышал. Учебник должен быть написан так, чтобы он был приспособлен к возрасту учащихся, своим внешним видом и содержанием привлекал бы внимание и интерес учащихся. Очень важно, чтобы основное содержание было как-то выделено, а то, что второстепенно и только поясняет основное содержание, не бросалось в глаза в первую очередь.

Недостатки учебников вызываются разными причинами — неудачное расположение материала, чрезмерная краткость или растянутость изложения, пренебрежение психологическими особенностями учащихся, неудачные формулировки, научная неряшливость изложения, излишнее увлечение формализмом в передаче знаний, усложненное изложение и многие другие. Но можно ли выделить и указать те обязательные требования, которым должен удовлетворять хороший учебник? Ответ на этот вопрос крайне необходим, и не только для авторов учебников, но и для преподавателей и учащихся, ради которых и создаются учебники.

Прежде всего ясно, что нельзя создать учебник, который был бы пригоден на все времена. Дело в том, что меняются общественные цели образования, состояние научных знаний, общекультурный уровень учащихся. Со временем неизбежно меняются научные представления об окружающем нас мире и о роли математических методов для его изучения. Все это неизбежно влияет на содержание образования, на материал, входящий в учебники, и на характер изложения. В начале XVIII века в нашей стране широкой известностью пользовался учебник арифметики Леонтия Магницкого (в действительности учебник Магницкого излагал сведения, далеко выходящие за пределы арифметики). В наши дни эта книга сохранила лишь историческую ценность и совершенно непригодна для школьного обучения по педагогическим, методологическим и собственно математическим соображениям. В течение ряда десятилетий нашего века заслуженным успехом пользовался комплект учебников по математике, созданный замечательным педагогом А. П. Киселевым (1852—1940). Однако считать, что и теперь учебники Киселева являются удачным решением проблем школьного учебника, было бы серьезной ошибкой. Дело в том, что жизнь с тех пор ушла далеко вперед, а многого необходимого и актуального в учебниках Киселева нет. Вдобавок, система изложения в них устарела и нуждается в существенной модернизации. В частности, современные учебники по математике обязательно должны содержать сведения, которые позволяли бы учащимся овладеть принципами устройства и практикой вычислений на современных вычислительных машинах, в первую очередь на микрокалькуляторах.

Пренебрежение психологическими особенностями школьников, в том числе их подготовленностью к восприятию общих понятий и дедуктивной системы изложения, жестоко наказывает авторов учебников. Для примера: в середине прошлого века выдающийся отечественный математик и педагог М. В. Остроградский (1801—1862) создал учебники геометрии для средней школы. Они были интересно задуманы и содержательны в научном отношении, но совершенно не учитывали познавательных возможностей учащихся. К тому же они были объемисты и написаны далеко не простым языком. В результате учебники не привились ни в гимназиях, ни в средних военно-учебных заведениях.

В некоторых кругах ученых и преподавателей сложилось ложное мнение, что для написания учебника не нужно каких-либо особых данных — способностей, специфической подготовки, знания возможностей учащихся и пр.,— а достаточно лишь свободного владения программным материалом. При этом авторы забывают, что они берут на себя огромную ответственность перед целым поколением и что неудачное пособие, если оно принято в качестве учебника, оказывает отрицательное влияние по меньшей мере 10—15 лет. Хороший учебник для школы написать гораздо сложнее, чем учебник для университета или же монографию на специальную тему. Работа над учебником для школы требует очень большого времени, многократных возвращений к уже написанным разделам, серьезных проверок в школьном преподавании в различных условиях с привлечением педагогов разных педагогических взглядов. В учебнике не имеют права встречаться не только ошибочные и усложненные формулировки, неточные определения, но и неправильно решенные задачи, плохо подобранные примеры, опечатки в условиях и ответах.

«Высокая идейность и научность, доступность и краткость, точность, ясность и живость изложения, совершенство методического аппарата — неотъемлемые требования к каждому учебнику»,— говорится в «Основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы»*). Все эти требования в полной мере относятся к школьным учебникам математики.

Примечателен тот факт, что в учебниках либо совсем не уделяется, либо уделяется крайне малое внимание методологическим аспектам науки. (Видимо, считается, что они получат отражение в объяснениях учителя.) Как возникали математические понятия? Чем определяется ценность математических теорий? Как связаны получаемые в школе математические сведения с жизнью и с актуальными общественными проблемами? Отвечать на эти вопросы нужно одной-двумя фразами, подходяще подобранными примерами и задачами, небольшими подстрочными замечаниями. Поэтому, на мой взгляд, этот материал должен быть отражен именно в учебнике математики, равно как и исторические сведения, являющиеся основой представлений исторического материализма в любой области знания. Такое изложение поднимает дух школьника, приучает к мысли о том, что математические теории тесно связаны с жизненными ситуациями и отражают в концентрированном виде определенные стороны реальных явлений.

Сформулируем теперь основные, как нам кажется, характеристики школьного учебника математики.

Во-первых, учебник предназначен для передачи учащимся того запаса систематизированных научных сведений, которые предусмотрены программой.

Во-вторых, учебник должен быть построен таким способом, чтобы оставаться доступным читателям, для которых он предназначен. В нем не должно быть ни неопределенных понятий, ни сложных определений. Он должен устанавливать прочные связи между тем, что учащиеся уже знают, и тем, что они должны узнать.

В-третьих, учебник обязан вырабатывать навыки самостоятельных умственных действий; добиваться того, чтобы общие положения теории не оставались без использования и чтобы учащиеся узнавали о том, как и в каких ситуациях их можно применять на практике.

В-четвертых, учебник устанавливает связи между математикой и другими дисциплинами школьного курса. К сожалению, на эту сторону дела почти не обращается внимания. Более того, в большинстве учебников даже не упоминаются возможные области применений.

В-пятых, учебник должен воспитывать мировоззрение учащихся неназойливо, краткими замечаниями, сделанными своевременно и убедительно.

---

*) «Правда» от 14 апреля 1984 г.

В-шестых, в учебниках обязательно нужно давать краткие исторические сведения о развитии соответствующих областей математики, Этот тезис тесно связан с предыдущим.

В-седьмых, изложение материала в учебнике должно соответствовать возрастным особенностям учащихся, уровню их развития. Уровень формализации изложения не может оставаться неизменным, а должен постепенно нарастать, не переходя в формализм. Первые пять-шесть лет обучения должны быть подготовительными и учебники следует строить так, чтобы на базе многих практических примеров привычного содержания делать общие выводы и вновь их проверять на доступных задачах. По мере взросления учащихся и роста их умственного развития нужно увеличивать элемент абстрактности изложения. Но всегда при этом доводить изложение до понимания учащимися сути дела, а не до заучивания ими готовых формулировок без их усвоения, без представления об их содержании. Для этой цели в учебнике следует помещать несложные задачи и вопросы логического характера, которые заставляли бы учащихся вникать в суть понятий, правил действия, формулировок теорем и причин накладываемых (на их применимость) ограничений.

Задача каждого учебника состоит не только в том, чтобы изложить доступно и корректно материал программы, но и в том, чтобы учащиеся приобретали умение учиться, т. е. воспринимать суть излагаемых правил, понятий, закономерностей и приучаться их использовать при решении задач и в практической деятельности, а не просто запоминать их словесную формулировку.

Конечно, указания в учебнике на связи с практикой, изложение примеров применения математики в реальных задачах, методологического характера замечания, краткие исторические сведения потребуют некоторого (незначительного) увеличения объема учебника (в пределах 6—8 страниц). На это нужно пойти, поскольку воспитание мировоззрения, исторической перспективы, убеждения в неразрывности связи практики и научных исследований является одной из основных целей школьного обучения. Сам я сторонник кратких учебников, из которых изъята «вода», даны ясные и чеканные формулировки, выявлены основные принципы и методы, но те несколько страниц, которые необходимы для установления связей с практикой, историей и методологией науки на доступном уровне, нужны и их никак нельзя считать излишними для дела образования и воспитания молодого поколения. Об этом четко сказано в постановлении ЦК КПСС «О дальнейшем улучшении идеологической, политико-воспитательной работы» («Правда», 7 мая 1979 г.): «...добиваться органического единства учебного и воспитательного процессов, формирования у учащихся и студентов научного мировоззрения, высоких морально-политических качеств, трудолюбия».

Необходимость постоянного внимания к методологическому воспитанию четко и определенно подчеркнута в документах о реформе среднего общего и специального образования.

В будущем — я глубоко в этом убежден — средняя школа откажется от идеи единственного учебника, которому строго должны следовать все учителя. Будет признана целесообразность существования нескольких книг, которые придерживались бы различных методических принципов, но были бы написаны на основе одной-единственной программы и как бы конкурировали друг с другом. Каждый преподаватель мог бы выбрать тот из учебников, который в максимальной мере соответствовал бы его методическим установкам, его представлениям о характере изложения. Может случиться и так, что различные разделы курса преподаватель предпочтет излагать даже по разным учебникам.

В прошлом веке замечательный наш педагог К. Д. Ушинский сказал, что учебник является фундаментом хорошего обучения. Нам нужно сделать все возможное, чтобы хорошие учебники пришли в нашу школу и задержались в ней. Для этого, несомненно, необходимо «привести в действие» многих преподавателей и ученых, чтобы они в совместном ли труде, индивидуально ли взялись за тяжелый и ответственный труд написания учебников, в которых изложили бы свой собственный опыт преподавания и свои идеи построения курсов арифметики, алгебры, геометрии. Само собой разумеется, что далеко не все, что будет написано, окажется удачным. Но то, что преподаватели, решившие стать авторами учебников, постараются привести свои мысли в порядок, имеет огромное организующее значение. Как правило, при этом оказывается, что разные авторы находят удачные решения при изложении различных разделов. Наличие большого числа рукописей позволит выбрать в них то, что сделано удачно; удачные главы и параграфы должны быть опубликованы в журнале «Математика в школе», как это уже неоднократно делалось.

Не может быть сомнений в том, что для появления талантливых авторов в нашей стране имеются неограниченные потенциальные возможности и несомненно найдутся авторские коллективы, которые способны написать не просто доброкачественные, но очень хорошие учебники. Для этого необходимо пробудить желание и открыть дорогу огромному научному и педагогическому опыту. Именно этими соображениями руководствовалось Министерство просвещения РСФСР, когда им было принято решение об объявлении открытого конкурса на создание новых учебников по математике. Соответствующее сообщение и положение о конкурсе было опубликовано в «Учительской газете» 30 января 1962 г. По условию конкурса рукописи представлялись под девизами, а фамилии авторов сообщались в особых запечатанных конвертах. Таким образом жюри конкурса решало вопрос о качестве рукописей не по фамилиям авторов, а по другим признакам: удачное расположение материала, хорошие методические новинки, ясный язык изложения, отсутствие серьезных математических и методических промахов и пр.

Всего на конкурс было представлено 86 рукописей, из них 22 по арифметике, 21 — по алгебре для восьмилетней школы, 17 — по алгебре и элементарным функциям для средней школы, 19 — по геометрии для восьмилетней школы и 7 — по геометрии для полной средней школы. Мне посчастливилось быть председателем конкурсного жюри и я с благодарностью вспоминаю дружную и очень ответственную работу членов жюри.

Хотелось бы отметить, что среди премированных рукописей были произведения не только известных методистов и ученых, но и ранее неизвестных авторов — учителей, инженеров, научных сотрудников. В частности, первая премия за учебник по алгебре для старших классов была присуждена рукописи учительницы Е. С. Кочетковой и научного сотрудника АН СССР Е. С. Кочеткова. Когда в 1965 г. он был напечатан (конкурс завершился в мае 1964 г.), учителя полюбили его и отдали предпочтение ему по сравнению с прославленным учебником А. П. Киселева. Я не имею в виду перечислить все премированные и отмеченные тогда учебники, тем более, что вскоре началась перестройка школьного математического образования. Отметим, что открытый конкурс открыл огромные возможности перед издательствами и министерством для отбора перспективных авторов. Мне кажется, что этот опыт очень полезно учитывать и в настоящем, и в будущем. Только, возможно, его следует пополнить рассмотрением отдельных глав рукописей на учительских совещаниях, в институтах повышения квалификации учителей, на кафедрах методики математики педагогических институтов.

Работа над совершенствованием учебников по математике не может быть завершена никогда, поскольку школа является живым организмом и то, что сегодня может считаться хорошим, завтра окажется недостаточным, а послезавтра уже неудовлетворительным. Поэтому думать над тем, каким должен быть учебник, следует непрерывно, постепенно внося изменения в то, что имеется, и разрабатывая перспективные идеи, чтобы завтра предложить нечто лучшее.

Наличие учебников не исчерпывает необходимость в литературе по математике для школы. Как для учителей, так и для учащихся нужна хорошо организованная и выполненная литература вспомогательного характера — по истории и методологии математики, книги о великих математиках прошлого, книги и брошюры о развитии математики в наши дни (как в нашей стране, так и во всем мире), работы, углубляющие знание курса средней школы, книги по занимательной математике. Однако самое важное, в чем до сих пор ощущается настоящий голод, необходимо создать книги о прикладной роли математики, о том, какое место она занимает в практике наших дней, о причинах возросшей роли математических методов в жизни современного общества. Эти книги должны быть написаны интересно, увлекательно, так захватывающе, чтобы подросток мечтал овладеть искусством применять математические знания к изучению реальных задач, к исследованию волнующих проблем производства, сельского хозяйства, медицины, транспорта. Нужно, чтобы он проникся мыслью о том, что изучение явлений числом и мерой открывает перед человечеством неисчерпаемые возможности проникновения в природу вещей и дает возможность путем расчета предугадывать особенности протекания интересующих нас процессов, прогнозировать события.

Думаю, что я не одинок и многие согласятся со мной, что среди книг, прочитанных в детстве, оказавших огромное влияние на формирование характера, воспитавших веру в силу науки, на первом месте следует поставить романы великого французского писателя Жюля Верна. Кто из школьников пятого — восьмого классов не зачитывался такими увлекательными произведениями, как «Дети капитана Гранта», «Восемьдесят тысяч лье под водой», «Таинственный остров»? Кто с тревогой и волнением не следил за каждым шагом героев и не приобретал по мере чтения географических и естественнонаучных знаний? Эти произведения не оставляют равнодушным и современного читателя, они попрежнему захватывают его воображение и воспитывают убежденность в ценности познания, овладения законами природы, разработки количественных методов расчета. Я назвал бы романы Жюля Верна гимном точным и инженерным наукам и их использованию на благо человечества, во имя полнокровной жизни на нашей планете. Замечательный образ Сайреса Смита — одного из героев романа «Таинственный остров», ставшего лидером и мозговым центром маленькой колонии, производит огромное впечатление на читателя. И в сознании читателей всех возрастов, как детей, так и взрослых, это лидерство закономерно и вполне оправданно, поскольку оно завоевано не грубой силой, а мыслью, знанием и стремлением сделать лучшей жизнь всех, а не только самого себя. Для налаживания жизни колонии, затерявшейся в просторах океана и отрезанной от человечества, он находит выход из казалось бы критических ситуаций и для этого использует знание физики, химии, математики и астрономии. Его знания таковы, что они всегда готовы к применению, являются орудиями действия, а не простым грузом памяти. Именно к этому мы и должны призывать наших учеников, показывая возможности современной науки, возбуждая высокие мечты и желания, стремления приносить пользу народу. Мы должны постоянно демонстрировать мысль, что знание является необоримой силой. Но знание только тогда становится силой, когда оно не сводится к заучиванию, а основывается на понимании и овладении методикой применения полученных сведений к делу, к практике, к решению жизненных ситуаций.

§ 6. О методологическом воспитании на уроках математики

Воспитание научного мировоззрения является одной из основных задач средней школы, и в решении этой задачи каждый предмет школьного курса может и должен внести свой особый и поэтому неповторимый вклад. Математика имеет огромные возможности для показа мощи научных методов в познании окружающего нас мира, выявления значения абстрактного мышления в научных и практических вопросах, выяснения процесса формирования научных понятий и путей возникновения и прогресса научных теорий.

Под мировоззрением понимают систему взглядов на окружающий нас мир, на возможность его познания человеком, на отношение человека к обществу и общественно полезному труду. Это выработка идеалов и принципов жизни и деятельности, которые человек готов отстаивать в любых условиях и подтверждать своим каждодневным поведением.

Воспитание научного мировоззрения является сложной и ответственной задачей, которая требует длительного и настойчивого внимания, а также постоянного и ненавязчивого воздействия педагогического коллектива. К ее решению следует приступать как можно раньше, еще до школы, продолжать в школе и совершенствовать всю жизнь.

Несомненно, что назначение общественных дисциплин в процессе обучения в основном мировоззренческое. Так, история родной страны внушает уважение к истории собственного народа; на примерах выдающихся соотечественников прошлого учит образцам поведения; воспитывает мысль, что для граждан его страны любая сложная проблема по плечу; прививает убеждение в том, что каждый человек является частью огромного коллектива с общим языком, общей культурой, общими историческими судьбами, общей ответственностью за дальнейший прогресс его страны и народа. Но в то же время история учит тому, что народы должны жить в мире и дружбе и что вместе, без вражды, в совместном труде удается добиться несравненно больших успехов. Одновременно история выявляет, что в развитии всех народов выявляются одни и те же исторические закономерности и что потенциально все народы обладают талантами. Различия наблюдаются лишь в условиях их проявления. Отсутствие талантливых математиков, физиков, биологов или писателей у какого-либо народа означает не его бесталанность, а то, что политические, экономические, религиозные, культурные и прочие условия мешают развитию этих талантов. Пример Советского Союза является ярким доказательством того, что при появлении необходимых общественных условий ранее отсталые народности за короткий срок выдвинули из своей среды многочисленных талантливых учителей, врачей, писателей и ученых.

Однако было бы глубокой ошибкой считать, что научное мировоззрение воспитывается только на уроках гуманитарного цикла. В действительности каждый предмет школьного обучения обладает возможностями для развития по крайней мере некоторых аспектов научного мировоззрения. Вот почему так важно, чтобы преподаватели всех дисциплин действовали при воспитании научного мировоззрения школьников согласованно, подобно хорошо сработавшемуся хору или же прекрасно сыгранному симфоническому оркестру.

Вопросы, связанные с развитием научного мировоззрения, позволяют преподавателям математики затронуть очень важные аспекты развития их науки. Так, известно, что среди даже крупных представителей математической науки распространены ошибочные точки зрения на природу математического знания, на его место в познании окружающего нас мира, на роль практики в развитии математики, на происхождение математических понятий и т. д. Мы обязаны еще в школе дать учащимся правильные точки зрения на все эти вопросы, помочь им в будущем избежать философских шатаний. Нельзя забывать и того обстоятельства, что ряд идеалистических философских систем привлекал и привлекает математику в качестве союзницы для иллюстрации основных их положений. Достаточно вспомнить философские системы Платона, Канта, Маха, А. Пуанкаре и ряда других, чтобы убедиться в этом. Недаром в замечательной книге В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм» большое внимание уделено критике философских взглядов крупных математиков прошлого — А. Пуанкаре, К. Пирсона, Э. Маха и некоторых других.

Несомненно, что беседы по философским вопросам математики следует проводить в школе с большим тактом, показывая происхождение математических понятий, выявляя роль математической абстракции, вникая в связи математики с задачами практики и демонстрируя зависимость прогресса математики и практики от взаимного обмена идеями, проблемами, методами. Очень важно своевременно показывать на доступных примерах, как математические методы позволяют просто и в определенных условиях исчерпывающе разрешать сложные задачи естествознания и инженерного дела. Это следует делать систематически, постоянно учитывая уровень развития школьников, их интересы и психологическую подготовленность. О глубоких вопросах познания количественными методами задач практики нужно говорить доступно и просто, не теряя при этом точности и строгости. Само собой разумеется, что необходимо привлекать материал истории, этнографии, археологии и экономики для такого рода кратких и увлекательных бесед.

Но беседы — только одна из возможностей воспитания научного мировоззрения школьников. Вторая возможность — насыщение самого содержания курса математики, иллюстративных упражнений, домашних заданий тем, что воспитывает мировоззрение.

В первую очередь это показ того, как постепенно развивались знания, какой длительный путь прошло формирование математических понятий. Например, полезно рассказать о том, как человечество от понятия целого положительного числа в пределах единиц пришло постепенно к понятию неограниченного числового ряда, как было вынуждено ввести отрицательные числа, а затем дробные и иррациональные. И на этом не завершился процесс формирования понятия числа. Комплексные числа появились как естественный объект изучения, поскольку без них решение систем алгебраических уравнений допускало бы исключения из общего правила: каждое уравнение n-й степени имеет n различных или равных корней.

Сближение преподавания математики с нуждами других дисциплин — физики, химии, географии, гуманитарных предметов — дает широкие возможности для демонстрации места математики и ее понятий в познании человеком природы и общественных явлений. Но при этом нельзя увлекаться только одной стороной дела — показом роли математики в других дисциплинах. Совершенно необходимо демонстрировать и другую сторону дела: как сама математика развивается под воздействием других научных дисциплин и практики. Иначе в неокрепшем сознании учащихся может возникнуть ошибочная мысль о том, что математические понятия и теории возникают под влиянием ничем не сдерживаемой фантазии ученого, а затем по необъяснимому феномену оказывается, что эти понятия и теории находят многочисленные и важные применения. А ведь эта точка зрения высказывается и очень серьезными учеными, обогатившими математику превосходными результатами. Само собой разумеется, что для воспитания мировоззрения огромную ценность представляет ознакомление учащихся с основными моментами истории математики и математических открытий. Как человечество переходит от полного незнания к элементам знания и от неполного знания к более полному, невозможно выяснить без обращения к истории науки. На необходимость исторического подхода в теории познания неоднократно указывали классики марксизма. На этом и только на этом пути можно увидеть тот длительный и сложный путь, который прошла математика в своем развитии, выявить, как со временем менялись ее идеалы и основные направления исследований. В некоторой мере история науки позволяет приблизиться к пониманию ценности не только областей исследования прошлого, но и современных ветвей математики. Для школьников весьма существенно ознакомление с истоками творчества крупнейших представителей науки прошлого, со значением их открытий для общественного прогресса. Эта тема заслуживает специального обсуждения.

Хороший преподаватель оказывает огромное влияние на умы и поведение своих учеников, они прислушиваются к его словам и стремятся, порой даже бессознательно, следовать тем принципам, которые он разделяет. Если учащиеся слышат на уроках математики не только изложение формальных основ предмета, но и элементы ее философских проблем, то они невольно начинают обращать внимание и на эту сторону вопроса. Беседы учителя математики о методологических вопросах науки, о значении их для самой математики и ее развития способствует тому, что философское осмысливание математики и ее методов становится для учащихся частью математического знания, а не чем-то внешним, необходимым лишь для общего образования. В то же время ознакомление с методологией науки, с ее общими философскими вопросами помогает учащимся взглянуть на предмет с более широких позиций, определить его место в системе знаний, увидеть науку в развитии, движении, задуматься о движущих силах ее прогресса и, в частности, понять необходимость все большей абстракции изложения математики, увидеть, как абстрактность изложения помогает познанию явлений природы, а также процессов, протекающих в обществе. Это приблизит учащихся к глубокому пониманию того, что одни и те же математические понятия и результаты применимы к самым разнообразным по своему конкретному содержанию явлениям.

Первый и центральный вопрос, который должен быть правильно разрешен каждым учеником, касается назначения науки и научного знания. Можно ли считать задачу науки завершенной на этапе открытия и формулировки найденной закономерности? На наш взгляд, это лишь первый шаг познания. Вторым шагом следует считать поиск возможностей использования найденной закономерности для практической деятельности. Третий шаг связан с расширением теоретических выводов в связи с отысканием этой закономерности и ее практическими применениями. Эта общая схема развития науки относится как к естествознанию, так и к математике.

Проиллюстрируем сказанное двумя примерами. Вскоре после выхода в свет книги «Элементарное введение в теорию вероятностей», которая была написана моим учителям А. Я. Хинчиным и мной, ко мне обратился один инженер-электрик с просьбой помочь ему разобраться в задаче расчета электрических сетей промышленных предприятий. Оказывается, чтение упомянутой книги навело его на мысль о том, что в электрических сетях действуют те же закономерности, с которыми сталкиваются в теории вероятностей: число подключенных к сети в каждый момент времени приемников тока (станков, насосов, двигателей и пр.) случайно, так же как случайна потребляемая каждым из них мощность тока. На этой базе возникла небольшая прикладная теория, доведенная до правил расчета сечений кабелей, которые следует прокладывать на заводах для снабжения цехов электрическим током. Требование, которое при этом выполнялось, состояло в том, чтобы сечения были не слишком малы (чтобы вероятность перегрева изоляции была невелика) и не слишком велики (чтобы не закладывать зря цветной металл в провода). Мне эта прикладная работа доставила не меньшее удовольствие, чем теоретические исследования по теории вероятностей. Имеет смысл отметить, что при детальном исследовании прикладной проблемы электроснабжения промышленных предприятий возникли и чисто математические задачи, относящиеся к поведению случайных процессов специального вида.

Второй пример относится к совсем другой области знания — к овцеводству. В 1965 г. мне довелось посетить Новую Зеландию, познакомиться с Гемфри Боуденом, знаменитым стригалем овец, бывшим чемпионом страны в этом виде искусства. Его работа вызывала восхищение: за 50—52 секунды от начала стрижки овца была полностью острижена, а он еще успевал за этот срок отделить шерсть второго сорта от шерсти первого сорта. Меня поразило то, что Г. Боуден играл огромной овцой, как мячиком. По-видимому, он заметил мое изумление и, обратясь ко мне, сказал следующее: «Вы, вероятно, удивлены тем, что я так легко переворачиваю овцу, и думаете, что я обладаю огромной физической силой. Нет, я попросту знаю расположение нервных центров овцы и своевременно нажимаю на нужные, чтобы овца сделала необходимые мне движения, а затем нажимом на другой центр фиксирую это положение». Далее он продемонстрировал мне, как заставить овцу перевернуться с левого бока на правый и после этого замереть.

Несомненно, что многие физиологи животных знают расположение нервных центров овцы, так же как и назначение каждого из них. Но это только полдела, важна и другая его половина — использование этого знания для повседневной деятельности, для облегчения труда и совершенствования трудовых процессов. Вот почему я так ратую за такой принцип обучения: «От непосредственного наблюдения к развитой теории и от нее к практике» Нам важно внушить учащимся мысль о том, что теория хороша тогда, когда она находит важные применения и служит обществу, когда ее результаты не складываются на полку и там пылятся, а живут и работают для человечества, для дальнейшего познания окружающего нас мира, помогают нам в нашей повседневной деятельности. Рассказанный эпизод мне хотелось бы завершить следующим: после демонстрации своего мастерства Г. Боуден с гордостью достал из кармана медаль «За трудовое отличие», которой наградило его наше правительство за то, что он передавал свое умение нашим стригалям и научил их пользоваться его методами.

Школа должна привить ребенку веру в неисчерпаемость интеллектуальных сил как человечества в целом, так и каждого человека, в том числе и его собственных. Необходимо открыть мир перед его умственным взором не только с позиций того, что уже сделано и известно, но и с позиций того, что еще предстоит сделать, чтобы раскрыть пока не известное. Нужно ему показать, что в мире еще полно неразгаданных тайн, исследовать которые придется его сверстникам и ему самому; именно им предстоит внести свою лепту в дальнейшее познание окружающего нас мира, его сохранение и рациональное использование содержащихся в нем богатств. Вот почему так важно как можно раньше познакомить учащихся со следующими основными положениями диалектического материализма: а) окружающий нас мир существует объективно и независимо от нашего сознания; б) человеческое мышление может его правильно отражать и тем самым познавать существующие в нем закономерности. Знание же этих закономерностей позволяет использовать их в практической деятельности общества.

Хорошо известно, что математика относится к древнейшим научным дисциплинам и ее начала теряются в глубине веков. На протяжении своей долгой истории она неоднократно меняла свои идеалы, а вместе с ними и основные направления своих исследований. Но при этом математика не отбрасывала ранее добытые знания, а широко их использовала для получения новых. Каждый такой этап в развитии математики не только обогащал ее новыми понятиями и методами, но и позволял охватить своим влиянием новые области практической деятельности, к которым ранее она не применялась. Что же является источником новых проблем математики? Каковы те пути, которые приводят к появлению новых математических идей? Эти вопросы, вполне естественно, особенно волнуют молодежь, перед которой возникают проблемы выбора поля деятельности. Учителю обязательно нужно уметь отвечать на эти вопросы и тем самым удовлетворять внутреннюю потребность своих воспитанников, быть может заронив при этом в их сознание желание и самим попробовать свои силы в математике и ее обширных применениях.

Путей появления нового в математике имеется несколько, и среди них основными следует считать следующие:

1) решение задач практики в самом широком ее понимании;

2) обобщение ранее полученных результатов, стремление довести их до естественных границ;

3) объединение разрозненных результатов единой идеей и построение на этой базе теории;

4) критический пересмотр содержания математики в целом.

Тезис о влиянии практики на развитие математики ни у кого не вызывает возражений, пока речь идет о прошлом. Что же касается современности, то тут полного единодушия нет. Я, например, считаю, что этот тезис продолжает сохранять свое значение и теперь. Но есть и другие мнения. Можно указать большое число авторов, которые убеждены, что наступили новые времена и математика уже развивается в силу внутренних причин, независимо от требований практики. Для того чтобы не быть голословным, приведу небольшой отрывок из сравнительно недавней статьи современного крупного французского математика Ж. Дьедонне, в которой указанная мысль высказана достаточно отчетливо.

«Напоследок я хотел бы подчеркнуть, сколь мало новейшая история оправдывает благочестивые пошлости прорицателей краха, регулярно предупреждающих нас о гибельных последствиях, которые математика неминуемо навлечет на себя, если откажется от применений к другим наукам... Даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов человеческой деятельности, в ней достало бы на столетия пищи для размышлений над большими проблемами, которые мы еще должны решить в нашей собственной науке»*).

Несомненно, что в этой цитате эмоции преобладают над фактами и стремлением спокойно разобраться в истинном положении дел. Известно, что за последние десятилетия математика пополнилась рядом очень важных ветвей математики, в которых практика была мощным и продуктивным толчком для возникновения соответствующей проблематики. Но я не хотел бы искажать истинный ход прогресса и утверждать, что только практические потребности приводили к возникновению новых ветвей математики. Несомненно, что внутренние процессы, происходящие в самой математике, играли при этом совсем не малую роль. Немного погодя об этом пойдет речь специально.

В этой цитате, несомненно, имеется правильная мысль: когда математик уже встал на путь научного творчества, то ему далеко не всегда нужны дополнительные импульсы извне и он значительное время может обходиться без запросов практики. Однако, чтобы встать на этот путь, требуется длительное воспитание в определенном направлении, ознакомление с уже развитыми математическими теориями, нужна также постановка нерешенных проблем, размышление над которыми приводит к созданию нового. Нельзя отмахиваться, как это делает Дьедонне, от невидимого влияния практики через беседы с коллегами, прессу, специальные журналы. Все это оказывает несомненное влияние на формирование тех вопросов, которые ставит перед собой математик. Кроме того, следует учесть и то обстоятельство, что психологические типы математиков слишком различны, чтобы все они имели для творчества одинаковые стимулы. Одни подходят к математическому творчеству, постоянно имея в виду определенные реальные процессы, для которых они создают математические модели, исследуют их и для этой цели создают новые методы исследования. Другие же увлечены решением чисто математических вопросов, вовсе не интересуясь проблемами практики. Но общение с практикой дает математике не только широкий набор вопросов, которые внутри самой математики могли бы и не возникнуть. Еще важнее другое: тесные связи с практикой

---

*) Dieudonné J. „Recent developments in mathematics" Amer. Math. Monthly, 71, 1964, № 3, с. 239—247

дают математике возможность сохранять свое значение в качестве орудия исследования для самых разнообразных областей практической деятельности от естествознания до сельского хозяйства и экономики.

В связи со словами Дьедонне о том, что «даже если бы математика насильно была отрезана...», хотелось бы напомнить, что нечто подобное было лет на 60 ранее сказано Реем — философом и математиком — в связи с обсуждением вопроса: мог ли бы творить математик, если бы внезапно исчез внешний мир? В «Философских тетрадях» В. И. Ленин привел слова Рея: «Да, бесспорно, если бы он исчез теперь; но мог ли бы он создать математику, если бы материального мира никогда не существовало?»*).

В качестве второй движущей причины развития математики мы назвали стремление к обобщению ранее известных результатов. История науки показывает, что обобщение является существенным источником математического творчества. Относительно частного результата задаются вопросы, касающиеся границ его применимости: насколько естественны те условия, в которых доказан тот или иной факт? Нельзя ли его обобщить? Такого рода движение мысли представляет как прикладной, так и теоретический интерес. Полезно заметить, что подавляющая часть математиков начинает свой творческий путь именно таким способом. Не следует думать, что обобщение не требует способностей и творческой жилки. Как правило, оно не сводится к простому повторению доказательств уже проведенных, а нуждается в новых идеях. Классическая теорема Пифагора неоднократно служила в математике отправным пунктом для обобщений, для расширения наших математических представлений. Достаточно вспомнить введение в научный обиход понятий многомерного евклидова пространства, гильбертова пространства, расстояния в метрических пространствах и пр. Таким образом, обобщение является мощным средством расширения математических знаний, которое постоянно будет использоваться в науке.

Третьим источником нового мы назвали построение теории. В том бурном потоке исследований, с которым приходится иметь дело теперь, когда ежегодно публикуются многие тысячи статей и монографий, доказываются десятки тысяч новых теорем, абсолютно необходима обобщающая мысль. Иначе наука превратится в хаос, в набор отдельных фактов. Разрозненные результаты необходимо превратить в стройную теорию, отдельные частные выводы должны получить максимальную общность, изложение должно получить разумную последовательность, частные результаты должны получаться в качестве следствий из общих предложений. Перед математиком постоянно должна возникать

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 478.

потребность в получении ответа на вопрос: является ли полученная им закономерность изолированным фактом или же одним из звеньев целой цепи подобных фактов? Открытие такой цепи позволяет взглянуть на обнаруженный факт с более общих позиций и заметить элементы порядка там, где до этого не было заметно никаких общих закономерностей. Создание теории является непременным и важным аспектом развития математики. Само собой разумеется, что когда исследователь ставит перед собой задачу построения некоторого математического явления, перед ним возникает множество частных вопросов, связанных с необходимостью обнаружения ряда неизвестных фактов, целесообразной их общей формулировки.

Несложно привести многочисленные примеры создания теорий того или иного математического или общенаучного значения, которые появились за последние годы. Для всех них характерны одни и те же особенности: от частных фактов — к созданию общих концепций, объединяющих многочисленные результаты; разработка общих методов их доказательства, позволяющих с единых позиций получать многочисленные частные выводы, на которые ранее приходилось затрачивать огромные усилия, проявлять по каждому частному поводу незаурядную выдумку. Конечно, такой обобщенный подход не дается даром и за него приходится платить большей абстрактностью понятий. Но всегда оказывается, что эти более общие точки зрения позволяют видеть дальше и получать отдельные факты значительно проще, чем при, так сказать, кустарном подходе к их получению.

Очень важно отметить, что построение широких математических теорий приводит не только к большей широте и абстрактности вводимых понятий, но и к большей абстрактности изложения. Оказывается, что это неизбежный процесс. Но следует заметить, что то, что одному поколению представляется чрезмерно абстрактным, следующее поколение воспринимает совершенно свободно и способно удивляться тому, что так недавно эти понятия или этот метод рассуждения считались сложными и для многих оказывались недоступными. Хотелось бы в связи со сказанным обратить внимание на то, что в современном инженерном деле стало уже привычным использовать правила математической логики и проводить рассуждения, используя абстрактные символы и понятия. Широкое проникновение вычислительной и управляющей техники в разнообразные направления жизненной практики с неизбежностью привело к широкому использованию как элементов математической логики, так и дедуктивных рассуждений, а также абстрактных языков, используемых для общения человека с машиной.

Четвертый источник новых проблем в математике связан с обоснованием математики, т. е. с критическим пересмотром ее исходных положений, основных ее понятий, представлений о полноте и строгости доказательств. Математика знает несколько такого рода пересмотров. Достаточно вспомнить, что в Древней Греции математика превратилась в дедуктивную науку. Каждое ее положение необходимо было не только формулировать, но и выводить из первичных положений и аксиом логическим путем. Начиная с Ньютона и Лейбница математика включила в себя новое действие — переход к пределу, и это обстоятельство привело к необходимости перестройки математики на базе понятия предела. В основном эта перестройка была завершена работами О. Коши и К. Вейерштрасса. В начале нашего века вновь пришлось взглянуть на состояние фундамента нашей науки и перестроить его на базе теории множеств. Всем хорошо известно, к каким огромным положительным последствиям привела эта перестройка: математика существенно изменила свое лицо и сделалась более гибкой (в значительной мере благодаря большей своей абстрактности); получила новые возможности применений к общественной практике; стимулировала появление новых областей математического знания (функциональный анализ, теория случайных процессов и т. д.); открыла путь неконструктивным доказательствам и широкому развитию чистых теорем существования. Лет пятьдесят назад группа французских математиков, работавших под коллективным именем Никола Бурбаки, предприняла попытку реформировать значительную часть математики, построив ее на теоретикомножественной алгебраической основе. Эта попытка нашла многих сторонников и вызвала широкий отклик, сильно изменив содержание ряда дисциплин и их изложение.

Такого рода пересмотры основ математики абсолютно необходимы для сохранения ее единства, для приведения ее логического фундамента в соответствие с накопленным материалом. Конечно, проблемы обоснования математики не снимаются с повестки дня и теперь, поскольку в ней появилось много новых областей исследования и выявилось стремление переместить центр интересов и представлений с понятий математики непрерывного в так называемую конечную математику. Это вызывает, в частности, резкое повышение интереса к вопросам комбинаторики.

В школьных занятиях специального внимания заслуживает аксиоматический метод. Если каких-нибудь 60 лет назад этот метод интересовал математиков при построении геометрии, то теперь он превратился в основу изложения подавляющего большинства математических дисциплин, а также нашел путь в практику инженерного дела. Аксиоматический метод становится важным элементом научного познания не только в математике и математически оформленных дисциплинах. Четкое выделение тех основных предпосылок, которые кладутся в основу теории явления, исключительно важно для самой возможности производить логические выводы, для того чтобы избегать незаметного введения дополнительных допущений в процессе исследования. Выбор аксиом не произволен, он тесно связан с самими особенностями изучаемого явления. При аксиоматическом подходе к построению теории отпадает существенная трудность, связанная с тем, что новые явления и факты приходится описывать старыми понятиями и терминами. При аксиоматическом описании и анализе явления все начинается с перечисления свойств объекта исследования и тем самым сразу дается четкое изложение той базы, на которой должна строиться теория. Если же опыт дает плохое совпадение с выводами теории, то открывается возможность изменения некоторых предпосылок для приближения теории к реальности.

Начиная со школьных лет мы должны приучать учащихся к тому, что наука, и математика в том числе, является огромной силой, позволяющей преобразовывать мир, помогать практике, изменять традиционно привычные производства. Теория диалектического материализма отводит науке роль преобразующего начала, позволяющего силы природы поставить на службу обществу.

§ 7. Об одном случае глубокой увлеченности математикой

В 1983 году человечество отметило 165-летие со дня рождения и 100-летие со дня смерти Карла Маркса, гениального ученого и революционера, одного из создателей философии диалектического и исторического материализма, идеологического вдохновителя революционного движения рабочего класса, одного из авторов «Коммунистического манифеста», автора бессмертного произведения «Капитал», в котором была развернута теория политической экономии капитализма. Миллионы последователей политических, философских и экономических воззрений Маркса населяют нашу планету и следуют по пути, указанному им.

Научное и литературное наследие великих людей прошлого представляет собой величайшую ценность для общественного развития. Не менее значительную роль для этой цели могут играть их письма и незавершенные рукописи. В них, как правило, разбросаны глубокие мысли, которые возможно окажутся полезными для различных целей, в том числе и педагогических. В этом плане исключительную ценность имеют письма и математические рукописи К. Маркса, впервые подвергнутые изучению пятьдесят лет назад С. А. Яновской и в несравненно более полном виде изданные в 1968 г. издательством «Наука». Расшифровка математических рукописей Маркса была настоящим научным подвигом, за который мы должны быть благодарны профессору Московского университета С. А. Яновской. Она же дала и первое описание содержания этих рукописей.

Маркс любил повторять слова «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается овладеть математическими методами». Эта мысль неоднократно высказывалась и ранее великими предшественниками Маркса — Р. Бэконом, И. Кантом и др. Для Маркса это были не только слова, но глубокое убеждение, которое он стремился осуществить в жизни, в своей повседневной работе.

Сохранилось около тысячи листов рукописей К. Маркса математического содержания. Спрашивается, чем вызван такой интерес великого экономиста и философа-революционера к математике? Что заставляло его затрачивать свои силы и время на казалось бы далекие от его основных интересов вопросы? Ответ на эти вопросы прост и самым тесным образом связан с разработкой проблем политической экономии. Его стремление к тому, чтобы эта наука позволяла производить расчеты, прогнозировать результаты, а не оставаться чисто словесной, привело к занятиям математикой и я бы сказал к увлечению ей. Об этом хорошо сказано в письме К. Маркса Ф. Энгельсу от 11.01.1858 г.: «При разработке основ политической экономии меня так чертовски задерживают ошибки в подсчетах, что с отчаяния я вновь засел за прохождение алгебры. Арифметика никогда не давалась мне. Но окольным алгебраическим путем я скоро опять возьму правильный прицел»*.

Много позднее, в письме Ф. Энгельсу от 31.05.1873 г. К. Маркс писал: «Я рассказал здесь Муру**) одну историю, с которой, говоря между нами, долго провозился. Но он думает, что вопрос неразрешим или временно неразрешим ввиду многих и большей частью еще лишь подлежащих обнаружению факторов, относящихся к этому вопросу. Дело в следующем: ты знаешь таблицы, в которых цены, учетный процент и т. д., и т. д. представлены в их движении в течение года в виде нисходящих и восходящих зигзагообразных линий. Я неоднократно пытался — для анализа кризисов — вычислить эти up and down (повышения и понижения — *Б. Г.*) как неправильные кривые и думал (да и теперь еще думаю, что с достаточно проверенным материалом это возможно) математически вывести из этого главные законы кризисов. Мур, как я уже сказал, считает задачу пока невыполнимой, и я решил до поры до времени отказаться от нее»***).

Заметим, что поставленная Марксом задача оказалась действительно исключительно трудной и она не решена до сих пор. Для нас обе приведенные цитаты важны в другом отношении: они показывают, что К. Маркс был твердо убежден в том, что изложение, а тем более развитие политической экономии требует систематического применения математических методов и аппарата и этот аппарат никак не может ограничиваться ариф-

---

*) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 29, с. 210.

**) Сэмюэл Мур (ок. 1830—1912) — английский юрист, друг К. Маркса; перевел «Капитал» на английский язык.

***) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 33, с. 71—72.

метическими сведениями, но требует также привлечения учения о поведении кривых, т. е. математического анализа. Политическая экономия для К. Маркса наука об одном из важнейших общественных явлений, которую невозможно изложить только посредством словесных выражений и простейших арифметических операций. Это система знаний, которая по своему существу требует широкого привлечения математики, как для формулирования ее закономерностей и более четкого изложения, так и для непосредственных применений и прогнозирования результатов. К сожалению, об этом аспекте политической экономии нередко забывают и воспринимают ее как чисто гуманитарную дисциплину, для изложения которой достаточно обычной речи. Если же при этом производят арифметические операции, то это считается верхом использования математики.

Маркс и Энгельс считали, что диалектика является всеобщим методом познания, применимым не только к общественным явлениям, но и в вопросах естествознания и математики. Введение в математику понятия переменной величины они считали значительным шагом в развитии науки, поскольку «поворотным пунктом в математике была декартова *переменная* величина. С ней в математику вошло *движение,* а вместе с ним и диалектика»*).

Диалектический подход к развитию науки совершенно естественно подвел К. Маркса к изучению истории математики и истории технологии. В сентябре — октябре 1851 г. К. Маркс старательно штудировал и делал многочисленные выписки по истории математики**). Большой интерес у Маркса вызвала история арифметики. Приведем несколько его записей по поводу прочитанного, для преподавателей они представляют несомненный интерес.

«Уже древнейшие народы, за исключением китайцев и татар, считали десятками. По-видимому, их толкнули на это пальцы на обеих руках. В качестве числовых знаков им служили буквы их алфавита. Различные степени десятков различались штрихами, как у греков, или подходящими комбинациями букв, как у римлян. Так называемые арабские цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Одно из прекраснейших открытий, состоящее в том, чтобы записывать, пользуясь ими, самые большие числа с помощью нуля и указания определенного места, пришло через арабов в Европу в 10-м или 11-м столетии»***).

Заслуживает внимания то обстоятельство, что Маркс особое внимание обратил на запись чисел посредством десяти числовых знаков. Собственно только арабская (индийская) система записи позволила автоматизировать операции счета. Мы в нашей учительской деятельности недостаточно подчеркиваем, насколько

---

*) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 573.

**) Poppe J. H. M., Geschichte der Mathematik seit der äbtesten bis auf die neuste Zeit, Tübingen, 1828.

***) Маркс К. Математические рукописи. М., «Наука», 1968, с. 243—244 большой скачок в человеческих знаниях достигнут благодаря введению во всеобщее употребление принятых теперь числовых обозначений. Для этого следовало бы показать учащимся, как осложняется даже простейшая операция сложения, если для обозначения чисел использовать буквенную систему записи и не пользоваться позиционной системой.

В своих конспектах Маркс отметил тот важный момент, что новое не сразу пробивает себе дорогу; требуется длительное время, чтобы было понято преимущество этого нового по сравнению с традиционным и привычным старым. Вот что им было записано:

«Первоначально арабские цифры и их поместное значение использовались только математиками, но никак в обычной жизни. Еще в XV столетии, даже в источниках, эти цифры еще очень редки: тогда чаще всего употреблялись еще римские числовые знаки. Лишь с середины XVI столетия арабские цифры становятся более обычными. В XV столетии эти цифры встречаются более на камнях, чем на пергаменте. В печатных изданиях ими почти не пользуются. В более старых печатных книгах даже год указывается почти всегда словами или римскими буквами»*).

Заслуживает внимания еще следующая запись: «Во времена римлян и даже позднее обычные вычисления, например в домашнем хозяйстве или торговле, никогда не выполнялись с цифрами, но делались с камнями и другими аналогичными знаками на *счетной доске*. На этой доске рисовалось несколько параллельных линий; и одни и те же камни или другие материальные знаки обозначали здесь на первой линии единицы, на второй — десятки, на третьей — сотни и т. д. (китайцы еще и теперь пользуются такой счетной доской)»**).

Хотелось бы заметить, что от такой счетной доски до позиционной системы счисления, казалось бы, всего один шаг. Однако прошли многие сотни лет, прежде чем эта мысль была высказана, и еще длительный период времени, пока она завоевала всеобщее признание и стала средством практических вычислений. Обратим внимание на то, что об интересе Маркса к истории математики известно не только из его конспектов, но из письма к дяде Леону Филипсу (ум. 1866), написанного 14.04.1864 г.***). В этом письме он сообщил также о своем стремлении выяснить все известное о вычислительных приборах.

Естественно, что Маркс особо интересовался теми арифметическими правилами, которые в его времена широко использовались в коммерческой практике. Так, он в своих заметках записал, что «в XVI веке уже не редкость правила товарищества и др. Уже тогда начали вычислять сложные проценты на капитал...»****). Кстати, в 1869 г. Маркс, в связи с исследова-

*) Маркс К. Математические рукописи. М., «Наука», 1968, с. 244—245.
**) Там же, с. 249—250.
***) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 30, с. 538—539.
****) Маркс К. Математические рукописи. М., «Наука», 1968, с. 246.

нием вопросов обращения капитала и роли векселей в межгосударственных расчетах, подробно проштудировал большой курс коммерческой арифметики Одермана и Феллера*). В тот же период он конспектировал книгу Гошена, посвященную международным расчетам**). Такое внимание к арифметическому самообразованию для Маркса было необходимо, поскольку он сам отмечал, что арифметика была чужда ему еще в юности и он остался в неладах с ней и позднее. В этом плане характерна запись, сделанная Ф. Энгельсом в письме К. Марксу от 30 мая 1864 г.: «...ты, кажется, с ней (арифметикой.— *Б. Г.*) в довольно далеких отношениях,— судя по невыправленным позорным опечаткам в числах»***). Марксу ничего не оставалось делать, как ликвидировать пробелы в своем гимназическом образовании. Но делал это он, всегда доводя изучаемое до полного понимания. Это очень полезно напомнить тем, кто считает, что изучение можно заменить запоминанием и бездумной зубрежкой.

Современная экономическая наука в еще большей степени, чем в XIX веке, нуждается в разнообразных математических результатах, а также методах исследования. И уже не только арифметика, алгебра и элементы математического анализа необходимы для поиска ее закономерностей и решения задач конкретной экономики. Необходимо глубокое овладение, к которому призывал К. Маркс, всеми необходимыми математическими методами: оптимизации, математической статистики, теории случайных процессов, дифференциальных и интегральных уравнений. К сожалению, опыт К. Маркса еще не послужил примером для многих экономистов и они остаются экономистами качественного толка, не будучи в состоянии провести даже элементарные расчеты, которые абсолютно необходимы для решения стоящих перед ними задач. Одновременно нужно отметить, что и студенты-математики знакомятся лишь с элементами экономической науки и не приучаются к мысли, что современная экономика по существу дела нуждается в использовании развитой математики и что во всяком случае экономист должен в совершенстве владеть арифметикой и представлять себе значение случайного в формировании экономических ситуаций. К сожалению, для математиков у нас не читаются специальные курсы по математической экономике. А это необходимо, чтобы воспитать специалистов, которые не боялись бы в своей практической и исследовательской работе использовать математические методы и не приходили бы в ужас от соприкосновения с простейшими расчетами и формулами.

Математикой Маркс занимался с тех пор, как всерьез стал заниматься исследованиями в области политической экономии. Так, уже в тетради, датированной 1846 г., наряду с выписками

*) F e l l e r F. E. und O d e r m a n n C. G., „Das ganze das Kaufmännischen Arithmetik", Leipzig, 1859.

**) C o s c h e n E. J. „The theory of the foreign Exchanges", London, 1875.

***) М а р к с К., Э н г е л ь с Ф. Соч., т. 30, с. 329.

по политической экономии встречаются и заметки по математике. В тетради 1858 г. содержатся не только материалы, необходимые для написания книги «Критика политической экономии», но и чертежи, относящиеся к элементарной геометрии, а также выкладки, связанные с изучением понятия степени и теории логарифмов.

К. Маркс не использовал средства математического анализа для решения проблем экономики, хотя на изучение элементов математического анализа он затратил много энергии и времени. Рукописи пока не помогают вскрыть побудительные причины перехода от занятий математикой в качестве вспомогательного средства для экономических исследований к работе над математикой ради нее самой. Возможно, он видел неизбежность использования методов математического анализа для исследования динамики экономических процессов и недостаточность для этой цели средств арифметики и алгебры. Возможно и другое: изложение основ дифференциального и интегрального исчислений в изученных им книгах его не удовлетворяло и он, как всегда, стремился, по его словам, «сорвать с науки покров тайны».

В 1862 году К. Маркс был весь во власти занятий математическим анализом и в письме Ф. Энгельсу от 6 июля писал: «В свободное время занимаюсь дифференциальным и интегральным исчислениями. Кстати. У меня избыток книг по этим вопросам, и я готов одну из них переслать тебе, если ты хочешь заняться этим делом. Я считаю это почти необходимым для твоих военных занятий. Кроме того, этот раздел математики гораздо легче (поскольку речь идет о чисто технической стороне дела), нежели, например, высшие разделы алгебры. Никаких предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей, здесь не требуется, но необходимо общее знакомство с коническими сечениями»*).

Через три или четыре года Маркс в приложении к пропавшему письму к Энгельсу объясняет ему сущность дифференциального исчисления на примере проведения касательной к параболе. Это связный текст, в котором с исчерпывающей ясностью дано изложение вопроса**).

Маркс занимался математикой самостоятельно. В его окружении не было ни одного лица, которое могло бы направить его занятия. До всего ему приходилось доходить самому. Ему же была свойственна такая черта характера — если в чем-либо он чувствовал себя не вполне уверенно, то не успокаивался до тех пор, пока не овладевал этим вопросом полностью, пока не получал внутренней убежденности в совершенстве своих знаний. При изучении дифференциального исчисления он ориентировался на

---

*) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 30, с. 296.

**) Маркс К. Математические рукописи, М., «Наука», с. 251—254.

книги, по которым велось преподавание в Кембриджском университете, где в XVII веке кафедру математики занимал великий И. Ньютон. К сожалению, в университете свято хранили букву традиций гениального ученого и излагали анализ по Ньютону, сохраняя его обозначения и способ изложения. В результате во времена Маркса учебники анализа, принятые в Кембриджском университете, были далеки от совершенства, игнорировали достижения европейской науки, в частности теорию пределов, разработанную О. Коши. Это наложило сильный отпечаток на занятия Маркса и на его длительные поиски разумного подхода к введению понятия производной и дифференциала.

Старые системы изложения его не удовлетворяли, и он систематически искал свой подход к тому, что мы теперь называем предельным переходом. Он читал один учебник за другим и не находил удовлетворительного решения. Перечислим сейчас только авторов учебников, которые Маркс проработал и законспектировал, чтобы составить хотя бы некоторое представление о том огромном труде, который осуществил он, чтобы выработать собственный взгляд на предмет. Вот далеко не полный список авторов, учебники которых им были прочитаны: аббат Сори, Бушарла, Лакруа, Хайнд, Хемминг, Маклорен, Эйлер, Ньютон, Лагранж, Даламбер, Муаньо, Ланден и др. Маркс жадно прочитывал одну книгу вслед за другой, но всюду принципы были в тени, ими-то эти авторы и не занимались.

Положение с изложением основ дифференциального исчисления в распространенных в ту пору учебниках превосходно описал друг и сподвижник Маркса — Ф. Энгельс в известной его книге «Анти-Дюринг»: «Когда в математику были введены переменные величины и их изменяемость была распространена до бесконечно малого и бесконечно большого,— тогда и математика, вообще столь строго нравственная, совершила грехопадение: она вкусила от яблока познания и это открыло ей путь к гигантским успехам, но вместе с тем и к заблуждениям. Девственное состояние абсолютной значимости, неопровержимой доказанности всего математического навсегда ушло в прошлое; наступила эра разногласий, и мы дошли до того, что большинство людей дифференцируют и интегрируют не потому, что они понимают, что они делают, а просто потому, что верят в это, так как до сих пор результат получался правильный»*).

Вот в этой-то обстановке логической неотработанности понятия предельного перехода, которая была отягощена обозначениями Ньютона, когда дифференциал обозначал одновременно нуль и не нуль, и приходилось Марксу самостоятельно, без квалифицированной помощи, преодолевать трудности, пробираясь через заросли ненужных и вредных наслоений, через понятия, которые были введены логически несовершенно. Теперь-то мы в

*) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 88—89.

состоянии оценить, сколь значительный шаг был сделан О. Коши, заложившим основы современной теории пределов и снявшим с понятия предельного перехода покров мистики и логического несовершенства. К сожалению, эти работы так и остались неизвестными Марксу.

По-видимому, первая попытка Маркса связно изложить свою концепцию производной и рассказать о ней Энгельсу относится к 1865 г. и содержится в работе «Задача о касательной к параболе»*). Позднее, в тщательно отредактированной работе «О понятии производной функции»**). В этой работе можно уловить, что переход к пределу Маркс рассматривал как процесс, а не как подстановку вместо приращений их предельных значений 0.

Несомненный интерес имеет работа «О дифференциале»***), подготовленная Марксом для Энгельса. Еще в середине прошлого века в учебной литературе, которая была в распоряжении Маркса, с понятиями и символами дифференциала связывались представления о каких-то особых величинах и функциях, которые отличны от обычных.

С ними и оперировали авторы учебников. Вводимые ими представления и принятая ими система изложения не укладывались в голове Маркса, и он искал другие пути изложения, которые позволяли бы оставаться в пределах обычных функций и чисел, вне той мистики, которая царила в головах и учебниках тогдашних авторов.

Об этом прекрасно сказано С. А. Яновской в ее вводной статье к отредактированной ею книге «Математические рукописи» К. Маркса». Я позволю себе привести принадлежащие ей слова: «...никаких особых величин в анализе нет; но символика и терминология сохранились, они оказались очень удобными. Почему? Как это могло произойти, если соответствующие понятия не имеют смысла? Наилучший ответ сейчас дают математические рукописи Маркса. И притом такой ответ, который позволяет выяснить сущность всякого символического исчисления, общая теория которого только недавно стала создаваться в современной математической логике.

Суть дела в оперативной роли символов исчисления. Если один и тот же, например, вычислительный процесс приходится применять многократно при решении самых разнообразных задач, то для всего этого процесса целесообразно выбрать особый символ, обозначающий кратко всю, как говорит Маркс, «стратагему действий» его образующих. Первичным, исходным при этом является именно этот процесс, который в противоположность вводимому для него символическому обозначению Маркс называет *реальным*»****).

---

*) Маркс К. Математические рукописи, М., «Наука» с. 251—254.
**) Там же, с. 29—45.
***) Там же, с. 46—75.
****) Там же, с. 10.

В последние годы подход К. Маркса к определению дифференциала вызвал определенный интерес. Этому подходу в последние годы были посвящены несколько работ. Здесь мы укажем на две из них — раннюю работу В. И. Гливенко*) и совсем недавнюю работу Х. К. Кеннеди**). Мы не будем теперь входить в большие подробности, поскольку заинтересованный читатель это сможет сделать сам по данным литературным указаниям. Сохранившиеся листы математических рукописей Маркса явно показывают, что он был крайне заинтересован в выяснении истории создания дифференциального исчисления и собирался написать на эту тему специальную статью. Подготовительные наброски ее изложены на страницах 137—189 много раз процитированного нами тома «Математических рукописей». Маркс наметил три этапа в развитии дифференциального исчисления: 1) мистическое построение, 2) рациональное и 3) алгебраическое. К первому периоду он отнес Ньютона, Лейбница, Тейлора, Маклорена и их современников. Этот период характерен вольной терминологией, введением понятий бесконечно малой и бесконечно большой величин как актуально существующих и необъяснимым фокусничеством с бесконечно малыми. Второй период он связал с именами Эйлера и Даламбера. Здесь речь идет уже не о бесконечно малых, а о произвольных конечных приращениях аргумента и соответствующих приращениях функции и их отношениях, а также о последующем возвращении к первоначальному аргументу. Наконец, последний, третий период отнесен к Лагранжу и его работе «Теория аналитических функций» (1797). Маркс был увлечен подходом Лагранжа, но не заметил, что далеко не все непрерывные (и даже дифференцируемые) функции могут быть разложены в степенные ряды. Таким образом, его рассуждения относятся лишь к узкому классу аналитических функций.

Несомненно, что в связи с увлечением теорией Лагранжа стоит и интерес Маркса к разложениям функций в строки Тейлора и Маклорена. Марксу казалось, что этим путем все дифференциальное исчисление сводится к оперированию с формулой бинома Ньютона и тем самым позволяет алгебраизировать дифференциальное исчисление. В рукописях сохранились наброски специальной статьи «Теорема Тейлора».

Очень досадно, что опубликованные математические рукописи Маркса не содержат его рукописного наследия, посвященного философско-методологическим вопросам математики и ее истории. Несомненно, что в них должны содержаться ценные мысли, которые и теперь сохраняют научную актуальность.

Очень интересное утверждение содержится в одном из писем Маркса, адресованных Энгельсу. Оно четко говорит о том, что

---

*) Гливенко В. И. «Понятие дифференциала у Маркса и Адамара».— «Под знаменем марксизма», 1934, № 5, с. 79—85.

**) Кеннеди Х. К. «Карл Маркс и основания дифференциального исчисления».— Историко-математические исследования, 1982, вып. 26, с. 17—39.

математика была для Маркса не только вспомогательным средством познания, но и эмоциональным успокоителем. По-видимому, на этом сказалась ее объективная значимость. Вот что он писал в письме от 23 ноября 1860 г.: «Писать статьи для меня теперь почти невозможно. Единственное занятие, которым я поддерживаю душевное равновесие, это — математика»*). Этот аспект занятий математикой мы никак не можем исключить, и приведенное признание Маркса существенно для организации педагогического процесса. Нам нужно только стремиться к тому, чтобы занятия математикой приносили учащимся радость, а не чувство беспокойства за свою интеллектуальную неполноценность. Я глубоко убежден в том, что познание школьного и вузовского курсов математики доступно каждому психически нормальному ребенку и молодому человеку. Но для этого следует их научить учиться, т. е. вникать в суть дела, а не просто бездумно заучивать формулировки и определения. Проникновение в суть дела предполагает, что полученные знания человек может применить к возникающим перед ним ситуациям и практическим вопросам. Именно так на вещи смотрел К. Маркс и поэтому стремился довести свое понимание предмета до полной отчетливости. Он любил повторять, что суть изучаемого должна быть раскрыта во всей его «девственной простоте... и всюду важно сорвать с науки покров тайны»**). На пути воспитания нового человека лежат значительные трудности. В этом деле могут оказать значительную помощь рассказы о характерах и отношении к делу великих ученых прошлого и настоящего.

Я считаю необходимым закончить настоящий параграф небольшой цитатой, которая раскрывает еще одну сторону математически оформленных исследований, о которой даже мысль никогда не заходила в мое сознание. В заключении на перевод первого тома «Капитала» Маркса русский цензор XIX века написал следующие слова: «Хотя автор по своим убеждениям законченный социалист и вся книга обнаруживает совершенно определенный социалистический характер, однако, принимая во внимание, что изложение ее не может быть названо доступным для всякого и что, с другой стороны, оно обладает формой научно-математической аргументации, комитет признает, что преследование этой книги в судебном порядке невозможно».

---

*) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 30, с. 88.
**) Маркс К. «Математические рукописи», М., «Наука», с. 193.

Глава 2. МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

§ 1. Математика и жизнь

За время своего существования человечество прошло огромный путь от незнания к полузнанию и от неполного знания к более полному и совершенному. Этот путь совершенствования наших знаний неограничен, и, несмотря на то что он привел нас к открытию многих законов природы и к построению картины мира, каждый день приносит новые открытия, новое проникновение в недостаточно изученные, а порой и полностью неизвестные стороны окружающей нас природы. Вместе с этим развитие наших знаний вызывает постановку новых проблем, необходимость выдвигать принципиально новые цели и искать существенно новые и одновременно более мощные методы исследования. Чтобы продвинуться по пути в неизведанное, чтобы поставить вновь открытые силы природы на службу человечеству, наука должна смело врываться в те области знания, которыми она интересовалась слишком мало или же которые из-за сложности господствующих там явлений казались недоступными нашим слабым силам. Но эти силы растут от поколения к поколению, и человечество находит новые возможности для проникновения в природу вещей. При этом всегда оказывается, что глубокое проникновение в суть явлений позволяет открывать многочисленные возможности использования найденных закономерностей для самых разнообразных сторон практической деятельности.

На памяти моего поколения человечество сделало огромный скачок в изучении законов природы и использовании полученных знаний в прикладных целях. Так, были запущены первые космические станции, положившие начало изучению природных явлений в космосе. Они еще совсем недавно казались недоступными непосредственному наблюдению. Теперь отдельные из этих явлений мы знаем, быть может, даже лучше, чем некоторые процессы, происходящие на Земле. Положено начало прямому изучению планет Солнечной системы, в том числе и нашего ближайшего соседа — Луны. На ней побывали первые люди, с ее поверхности сняты первые образцы грунта, они исследуются в земных лабораториях. Созданы первые совершенные автоматы, которые способны самостоятельно взять пробу грунта, погрузить его в контейнер и отправить на нашу родную Землю. Давно ли человечество сделало первый шаг по овладению внутриатомной энергией, а теперь, спустя каких-нибудь 20—25 лет после пуска первой атомной электростанции в небольшом подмосковном городке Обнинске, в мире работают десятки несравненно более мощных атомных электростанций и дают заметную долю электрического тока для удовлетворения нужд человечества. Океаны бороздят атомные ледоколы. И это только начало возможного дальнейшего прогресса.

Немногим более трехсот лет прошло с первых работ Б. Паскаля и Г. Лейбница по созданию автоматов для производства простейших арифметических действий. Почти все триста лет прогресс в этой области происходил крайне медленно. Чудом техники считались ручные арифмометры системы «Однер» и логарифмические линейки. Современные счетные машины способны производить за секунду миллионы элементарных вычислительных и логических операций и действуют автоматически, без вмешательства человека, по заранее составленной программе. Изобретение электронных вычислительных машин (ЭВМ) явилось одним из крупнейших научных событий XX века. Оно оказало исключительно большое влияние на математизацию науки и на использование математики в практической деятельности.

Математические методы исследования, ранее использовавшиеся в широких масштабах лишь в астрономии, физике и некоторых областях инженерного дела, теперь нашли многочисленные применения во множестве областей знания и практической деятельности. Без предварительных сложных расчетов теперь не выпустят с завода ни одной мало-мальски сложной машины и ответственной инженерной конструкции, не станут модернизировать технологический процесс. Прежде чем сдать новую конструкцию автомобиля, самолета или атомного реактора в производство, приходится проводить многочисленные расчеты жизнеспособности конструкции, ее надежности, приспособленности к выполнению возлагаемых на нее функций, эффективности и пр. Чтобы осуществить полеты в космос, потребовалась многолетняя сложнейшая работа математиков и инженеров, направленная на расчеты конструкций ракет, двигателей, на определение силы тяги, нагрева тела ракеты, способов отвода тепла, оценки прочности и безотказности всех жизненно важных узлов и т. д. Выполнить все эти расчеты без привлечения практически всех основных разделов современной математики невозможно. Без расчетов же, одним экспериментальным путем решить все эти вопросы немыслимо, поскольку организация и проведение экспериментов заняли бы столь длительное время, что осуществить полет было бы невозможно. Вдобавок к этому организация работ по проектированию потребовала бы такой затраты материальных средств, что ни один государственный бюджет не смог бы ее выдержать.

При изучении биологических явлений, в том числе в медицине и сельском хозяйстве, широко используются математические модели и электронные вычислительные машины. Составлены и просчитаны на ЭВМ модели распространения эпидемий гриппа, разработаны методы использования ЭВМ для целей медицинской диагностики. Для сельскохозяйственных районов с ограниченными водными ресурсами, в которых производство ведется на базе орошения, большое значение имеет рациональное водопользование. Это означает такое распределение воды для орошения, при котором удается при заданной стоимости кубометра воды получать максимальную отдачу продуктов. В настоящее время созданы математические методы решения этой задачи и проводится широкая проверка разработанной теории. Математика стала необходимым орудием познания, расчета и прогнозирования. Важно заметить, что само проведение эксперимента и испытаний привело к необходимости построения математической теории эксперимента, в частности оптимального планирования эксперимента. В современных познании и практической деятельности теперь много и впечатляюще говорят о роли математики, называя наше время эпохой математизации знаний.

В наши дни представители ряда важных отраслей промышленности с таким же основанием, как физики, могут заявить, что «математика в их области знания и деятельности является не просто орудием расчета, но без нее невозможно само понимание происходящих процессов». Мы никак не можем забывать того, что математика в наши дни превратилась в производительную силу общества. И теперь там, где еще недавно царил чисто качественный подход к изучению явлений, отыскиваются количественные закономерности и широко применяются строгие математические методы. При этом чем грандиознее замыслы, тем более значительной становится роль математики. Это отчетливо видел В. И. Ленин, когда в своем основном философском произведении «Материализм и эмпириокритицизм» писал о том, что «приближение к таким однородным и простым элементам материи, законы движения которых допускают математическую обработку»*), является крупнейшим достижением естествознания.

Теперь, по сравнению с прошлым веком и началом текущего, мы далеко продвинулись вперед в изучении явлений макро- и микромира, а также в использовании математических методов для этих целей. В этом отношении характерно содержание следующей цитаты из «Диалектики природы» Ф. Энгельса: «Применение математики: в механике твердых тел абсолютное, в механике жидкостей уже труднее, в механике газов приблизительно; в физике больше в виде попыток и относительно; в химии простейшие уравнения первой степени; в биологии = 0»**). За какое-

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 326.
**) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 587.

нибудь столетие со дня написания этих слов положение изменилось коренным образом. Применения математики в механике жидкостей и газов стали далеко не приблизительными, они дают возможность производить расчеты движения тел, решать оптимальные задачи, связанные с выбором траекторий, экономией горючего и пр. И в физике эти применения имеют место не только в виде попыток. Возьмем хотя бы тот факт, что существование ряда элементарных частиц первоначально удалось узнать не из физических опытов, а из математических расчетов. Точно так же обстоит дело с химией и биологией. В биологии роль математики теперь далеко не сводится к нулю. Но для того чтобы математика и далее оказалась способной к открытию и исследованию новых явлений природы (как микро-, так и макромира), необходимо, чтобы она непрерывно развивала свои методы и оттачивала разработанные ею орудия исследования.

Как ни велики успехи научного познания,— проблем для изучения, и притом весьма значительных и сложных, остается очень много. Более того, при совершенствовании методов исследования выясняется, что многие вопросы, которые казались хорошо изученными, требуют основательной доработки. Среди задач, требующих теперь самого пристального внимания, хотелось бы отметить такие, как познание процессов мышления, действие памяти, управление познавательной деятельностью, выяснение причин психических заболеваний и разыскание стойких средств противодействия их наступлению. Нам ясно, как важны эти проблемы для человечества и для педагогической деятельности и как далеки мы от их глубокого и всестороннего решения. Если бы мы научились хорошо управлять познавательным процессом во время урока, то как изменило бы это интеллектуальный потенциал страны, как облегчило бы работу педагога и в средней и в высшей школе. Это дало бы возможность в заданные сроки дать более широкое и глубокое образование и приблизить к творческому отношению к делу несравненно большее число людей. Это позволило бы изжить второгодничество и переживания тех учащихся, которые не в состоянии следить за изложением учителя.

Наш век выдвигает перед исследователями множество других проблем — разумного расходования минеральных ресурсов, изучения и использования богатств океана, рационального вылова рыбы из водных бассейнов, прогнозирования отказов технических систем — электрогенераторов, самолетов, электрических кабелей и пр.; разработка новых форм связи и совершенствования существующих ее видов — телефонной, телеграфной, радио и иных, оптимального использования энергетических ресурсов, перевода тяжелых и опасных для здоровья человека работ на обслуживание роботами и пр. Таких проблем, глобальных и локальных, можно назвать тысячи и их невозможно исчерпать не только в небольшом параграфе книги, но даже в многотомном сочинении. Нам же необходимо одно — подавляющее большинство этих проблем нуждается для своего решения в использовании математических методов и в их совершенствовании. Множество самых разнообразных требований предъявляются теперь физикой, инженерным делом и организацией производства к современным вычислительным машинам: необходимо увеличить их быстродействие, оперативную память, уменьшить массу и габариты, сделать их более гибкими в применениях и т. д. Над решением этих проблем во всем мире работают тысячи математиков, физиков, инженеров. В этой области знания многое уже сделано, но множество проблем еще ждут своих исследователей. Очень важно для будущего страны и ее обороны, чтобы о них узнавали учащиеся еще в школах и впоследствии увлекались поиском новых схем ЭВМ, новыми областями их использования.

При современных скоростях технологических процессов (проката в металлургической промышленности, изготовления бумаги и пластиковой пленки, получения оттисков в полиграфических производствах и пр.) человек с помощью своих пяти чувств уже не способен своевременно вмешиваться в течение производственного процесса с целью улучшения качества изготовляемой продукции. Хорошо известно, что при прокатке балок или проволоки скорость прокатываемых изделий превышает скорость экспресса и достигает 150 км/ч. А при ручном управлении изготовлением бумаги вблизи от оптимального режима удается удержаться не более 10% рабочего времени. Остальные же 90% времени производственный процесс далек от наилучшего протекания, в результате чего снижается производительность оборудования, повышается расход исходных материалов, ухудшается качество продукции. Потери при этом очень велики. Для некоторых типов производств проведенные исследования показывают, что потери превышают расходы на зарплату рабочих и служащих. Заметим, что организация такого рода исследований также нуждается в математических средствах и в первую очередь — в правильном сборе и обработке собранных статистических данных.

Вопросы автоматического управления возникали и возникают в самых разнообразных областях практики — в авиации, морском деле, промышленности, сельском хозяйстве, связи. Появилась острая проблема: разработать теорию и практические правила оптимального управления процессами в заранее определенном смысле, а также сбора необходимой для этой цели информации. Следует заметить, что автоматическое устройство само по себе даже при наличии идеальных данных о состоянии управляемого процесса принять решение о необходимом воздействии не может. Автомат ведь «не понимает» смысла слов «делай лучше», «вари сталь до готовности», «закручивай гайку до отказа». Ему нужна точная программа, как следует поступать в тех или иных случаях.

Ему необходима программа действий, которая во всех деталях должна предусматривать его реакцию на поступающую информацию о ходе процесса и значениях определяющих параметров. А это неизбежно требует разработки количественной, т. е. математической, теории самого явления. Так неизбежно прогресс в области техники приводит к необходимости использования математики на весьма высоких ее уровнях. Но еще совсем недавно, в пятидесятых — начале шестидесятых годов, очень остро стоял вопрос о выработке тех принципиальных положений, того математического метода, который способен сдвинуть с мертвой точки сам подход к решению задач оптимального управления.

До того как возникла общая задача управления процессами, еще в тридцатые годы начала изучаться и в результате вполне удовлетворительно решена важная проблема управления самолетом в полете посредством автомата. Тогда же начали разрабатываться станки с автоматическим управлением. Постепенно круг подобных задач расширялся и вместе с этим прояснялось то, что кустарный подход дальше нетерпим и что требуется разработка общих принципов в теории управления и не просто управления, а наилучшего, т. е. оптимального, управления. Такая задача привлекла к себе внимание многих крупных умов, в том числе и математиков. Принципиальных сдвигов в решении этой проблемы удалось добиться Л. С. Понтрягину (род. 1908) в нашей стране и Р. Беллману (род. 1920) в США. Разработанные ими идеи и принципы привели к новым математическим дисциплинам — теории оптимального управления (Л. С. Понтрягин и его ученики) и динамическому программированию (Р. Беллман и его сотрудники). Родившись из задач инженерного дела, обе теории оказали большое влияние как на прогресс самой математики, так и на инженерное дело, значительно расширив возможности применения математических методов и в других областях практической деятельности.

В конце двадцатых — начале тридцатых годов развитие физики, теории телефонной связи, биологии привело к настоятельной необходимости создания математических методов, которые позволяли бы изучать случайные функции от одного или нескольких независимых переменных. Вот примеры такого рода. В метеорологии следовало изучать изменение ветра в данной точке пространства от времени. В ихтиологии стали интересоваться динамикой численности рыбной стаи, а также плотностью микроорганизмов в различных точках водной толщи в зависимости от времени.

В теории телефонной связи следовало установить закономерности образования очередей на соединение и зависимость длительности ожидания абонентом связи от величины загрузки станции. В физике стали изучать диффузию как процесс взаимного проникновения молекул из двух или нескольких сред. Число таких примеров росло и становилось невозможным пользоваться неопределенными понятиями и производить важные научные и практические расчеты без строгой математической теории. И такая теория была создана в значительной степени благодаря усилиям А. Н. Колмогорова (род. 1903), А. Я. Хинчина (1894—1959), Е. Е. Слуцкого (1880—1948) и ряда других математиков. Она получила название теории случайных процессов и полей (процесс — случайная функция одного аргумента, поле — случайная функция нескольких аргументов). Глубокие теоретико-функциональные основы этой теории были заложены А. Н. Колмогоровым в его знаменитой монографии «Основные понятия теории вероятностей» (1933) и в статье «Аналитические методы в теории вероятностей» (1931).

Смысл математизации знаний состоит не в том, чтобы все познание свести к созданию логических и вычислительных схем и не оставить места ни эксперименту, ни непосредственному наблюдению. Такая программа завела бы познание в тупик. Цели математизации более реальны и плодотворны. Их смысл можно, пожалуй, сформулировать таким образом: из точно перечисленных предпосылок выводить логические следствия, в том числе и такие, которые доступны прямому наблюдению; сделать доступными логическому и количественному анализу сложные и запутанные процессы, на которые, как правило, наслаивается множество второстепенных влияний; помимо уже установленных фактов посредством математического анализа устанавливать новые закономерности; получить возможность посредством расчетов прогнозировать протекание явлений, добиваясь не только качественного, но и количественного согласия с реальным их течением.

Если эти предсказания оправдываются, то теория укрепляет свое положение и накапливает дальнейшие выводы. Однако рано или поздно, поскольку математическая теория описывает реальные процессы лишь приближенно, в силу неточности исходных предпосылок теории обязательно наступает момент, когда какое-то следствие теории не подтверждается практикой или экспериментом или же наблюденный экспериментальный факт не укладывается в развитую теорию. Это будет означать недостаточность теории, ее слабость, необходимость ее уточнения и дальнейшего совершенствования. В этом случае становится необходимым пересмотр исходных посылок теории, изменение тех фундаментальных положений, которые казались достаточно хорошо передающими истинную картину явления и поэтому были положены в ее основу.

С такого рода затруднениями встретились в самолетостроении в конце тридцатых годов, когда скорости самолетов поднялись с 200—300 км/ч до 600—700 км/ч. Предположение о несжимаемости воздуха, которое вначале идеально «работало», оказалось уже неприемлемым при больших скоростях. От него следовало отказаться и перестроить аэродинамику в предположении, что при больших скоростях воздух является «сжимаемой жидкостью». Точно так же позднее, когда скорости самолетов достигли скорости звука, выявила свою недостаточность и теория полета самолетов с большими, но дозвуковыми скоростями. Ту же самую картину можно проследить на любой другой дисциплине, как прикладной, так и теоретической: теория развивается в определенных предпосылках до тех пор, пока она не приходит в противоречие с предъявляемыми к ней требованиями, когда уже перестает удовлетворительно описывать явления и становится неспособной для новых выводов. В этот момент необходим пересмотр начал теории и смена исходных предпосылок.

В результате можно сказать, что математизация наших знаний состоит не только в том, чтобы использовать уже готовые математические методы и результаты, а в том, чтобы создавать тот специфический математический подход, который позволял бы точно и полно описывать интересующий нас круг явлений, выводить необходимые следствия и использовать получаемые результаты для практической деятельности. Так случилось в математике в начале прошлого века, когда созрело время для изучения явлений переноса тепла, магнитных и электрических явлений, построения волновой оптики! Попытки математического изучения этих явлений уже разработанными методами оказались невозможными. Нужен был тот математический инструментарий, который был бы способен адекватно передавать на математическом языке особенности изучаемых явлений. Именно тогда и была разработана теория дифференциальных уравнений математической физики. Точно так же в конце XVII — начале XVIII в. насущной необходимостью для человечества было создание математических методов исследования механического движения. Это было необходимо для индустрии, транспорта, военного дела. Мы знаем, что такие методы были найдены и разработаны, а именно И. Ньютон, Г. Лейбниц, в какой-то мере — их предшественники, а также их современники создали величественное здание математического анализа. Именно математический анализ впоследствии явился базой для поразительного прогресса точного естествознания и инженерного дела.

Для прогресса математики в наше время имеются достаточно серьезные основания, поскольку человечество перешло в новую фазу развития естественных наук и серьезного обновления инженерной мысли. К науке предъявили свои требования новые области исследований и практической деятельности — электронная оптика, овладение космическим пространством, использование и изучение атомных процессов, прогресс и эксплуатация электронной вычислительной и информационной техники. Только программа овладения околоземным космическим пространством выдвигает огромное число вопросов, ответы на которые требуют новых подходов, разработки особых методов их разрешения. Здесь и проблемы управления космическим аппаратом буквально с ювелирной точностью, сброса огромных количеств тепловой энергии с поверхности ракеты, оценки опасности встречи с космической пылью и метеоритами, разработки способов борьбы с пробиванием корпуса, проблема сверхдальней радиосвязи в условиях значительных помех. Многие из выдвинутых задач были новы для науки и требовали разработки специальных приемов их решения. С таким же положением дел приходилось и приходится сталкиваться постоянно при каждом изменении технологии, при внедрении в практику новых идей. В результате постоянно приходится быть свидетелями того, как практика влияет на развитие математики и как математика позволяет совершенствовать практику.

Прежде чем практическая задача превратится в объект математического исследования, она должна пройти значительный путь. Нужно ясно представить себе, в чем состоит та практическая задача, которую следует решить. Эта задача должна быть четко сформулирована и понята не только практиком, но и математиком. Мой многолетний опыт учит, что нередко практики считают математику каким-то волшебным инструментом, который работает сам по себе, почти автоматически, без предварительного проникновения математика в саму суть предлагаемой ему задачи. Проиллюстрируем эту мысль на примере управления педагогическим процессом. Об этом сейчас много говорят на педагогических конференциях и на инструктивных заседаниях. Как управлять познавательным процессом учащихся и управлять самым лучшим способом? Сама эта идея весьма заманчива и может дать при разумном ее понимании и решении огромные результаты — ускорение восприятия, прочность закрепления, интерес, глубину проникновения в материал, приобретение твердых навыков применений. Но немедленно возникает вопрос: какой смысл следует придавать утверждению, что преподаватель должен управлять процессом обучения наилучшим образом? Ведь чтобы эти поиски были целенаправленными, им следует придать точный и определенный смысл. Однако эту задачу можно понимать многими различными способами. Скажем, можно добиваться того, чтобы все учащиеся в установленные сроки и с хорошим пониманием усваивали программный материал, возможно даже путем пренебрежения интересами наиболее способных учащихся. Но может быть мы хотим, чтобы самые способные учащиеся пошли в своем развитии возможно дальше. А может быть мы имеем в виду в первую очередь развитие практических навыков? Мы можем предложить наряду с предложенными и другие критерии желаемой цели. Какой же из них выбрать? По какому искать оптимальность управления? Я убежден, что в ряде случаев еще не все подготовлено, чтобы правильно решать столь важную задачу. Пока эта задача оптимального управления процессом обучения даже правильно и четко не поставлена словесно. Тем более она не созрела для того, чтобы к ней применять математические методы. Требуется предварительно разработать большой комплекс проблем, касающихся уточнения постановки самой этой задачи управления, а также изучения влияния психологической обстановки в классе, реакции учащихся на управляющее воздействие учителя, а также на то, как это воздействие произведено, и многого другого.

Математизация науки и практической деятельности приводит к изменению мышления, к его уточнению, к большей логической строгости суждений и выводов. Все это является ничем иным, как элементами математизации мышления.

§ 2. Математика — язык науки

Известно изречение о том, что математика является значительно бо́льшим, чем наука, поскольку она является языком науки. Эта фраза требует небольшого пояснения, поскольку в США и странах Западной Европы слово наука (science) употребляется в более узком смысле, чем в нашей стране, а именно только для обозначения естественных дисциплин и не включает в себя социальных и гуманитарных предметов. В последние годы приведенное утверждение приобретает все большее число сторонников, поскольку к математике за помощью обращаются представители не только физики, но и многих других дисциплин — астрономии, химии, экономики, медицины, археологии, социологии, сельского хозяйства, организации производства. Математика при этом позволяет давать точную формулировку возникающих проблем, уточнять понятия, проверять соответствие теоретических положений с реальным течением явлений. Многим становится ясно, что без современной математики с развитым логическим и вычислительным аппаратом, с ее символикой был бы невозможен современный прогресс физики, космонавтики, авиации, метеорологии, радиотехники и других дисциплин.

По-видимому, впервые четко и ясно о математике как языке науки почти четыреста лет назад сказал великий естествоиспытатель прошлого Галилео Галилей. По его словам, философия, т. е. наши представления о мироздании, написана в грандиозной книге — природе, которая открыта для всех и каждого. Но прочесть и понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее — математические формулы. Несомненно, что с тех пор наука добилась огромных успехов, а роль математики в науке неизмеримо выросла. Многие успехи техники, экономики, организации производства, естествознания без широкого использования математики были бы просто невозможны. Один из крупнейших физиков современности В. Гайзенберг так охарактеризовал место математики в современной теоретической физике: «Первичным языком, который вырабатывают в процессе усвоения фактов, является в теоретической физике обычно язык математики, а именно математическая схема, позволяющая физикам предсказывать результаты будущих экспериментов»*).

*) Гайзенберг В. «Физика и философия». М., Изд-во «Иностранная литература», 1963, с. 140—141

Для общения и выражения мыслей природа наделила людей величайшим средством — живым разговорным языком, который люди развили и научились фиксировать с помощью записи.

Язык на протяжении времени не остается неизменным, но приспосабливается к условиям жизни, обогащает словарный запас, вырабатывает новые средства для выражения тончайших оттенков мысли, человеческих эмоций и реальных ситуаций. Мы на протяжении нашей жизни испытали на себе воздействие развития языка. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что сейчас уже обыденными стали слова колхозник, телевизор, спутник и многие другие. И тем не менее, несмотря на всю свою гибкость и многогранность, во многих случаях он оказывается недостаточным и даже больше — неудовлетворительным средством общения. В различных областях деятельности вырабатываются как бы свои собственные языки, специально приспособленные для точного и краткого выражения мыслей, системы действий, правил поведения, свойственных определенным видам человеческой деятельности. Для примера, хирург во время операции обращается к своим помощникам совсем не так, как в обычном разговоре. Он произносит отдельные слова, почти не пользуется сказуемыми. При постройке судов, погрузке пароходов тоже говорят так, что непривычному человеку можно и не понять, что хотят специалисты. Приведем еще один пример.

При выдаче рабочего задания на изготовление того или иного изделия техники никогда не ограничиваются только словесным описанием. Такое описание недостаточно определенно и грозит тем, что исполнитель может допустить разного рода ошибки. Для уточнения размеров, формы и иных особенностей изделия необходим в первую очередь чертеж, в котором указаны все необходимые размеры. В какой-то мере чертеж является тем своеобразным языком, который приспособлен для передачи необходимой информации, которую желает и должен сообщить конструктор исполнителю. Чертеж не допускает разночтений и позволяет в наглядной форме передавать огромную информацию, необходимую для успешного выполнения работы. Эта форма общения несравненно удобнее и экономнее обычной словесной, поскольку словесное описание мало-мальски сложного конструктивного задания было бы настолько громоздким, что в нем мог бы запутаться и сам автор. У чертежа имеется еще одно несомненное преимущество: его без труда прочтет любой специалист, даже не владеющий родным языком конструктора.

В науке особенно важны ясность и точность выражения мыслей. Язык науки не должен создавать дополнительных трудностей при восприятии сообщаемой информации, но должен доносить идеи и факты в однозначном, не допускающем различных толкований виде. Без этого требования не может быть науки как системы знаний, не может быть уверенности в том, что определенное утверждение или предположение не было искажено при передаче сообщений или же в процессе рассуждений. Необходимо также предусмотреть все мыслимые исходы и не пропустить каких-либо возможностей, оставшихся за бортом перечисленных. Научное изложение должно быть кратким и вполне определенным. Именно поэтому наука должна разрабатывать собственный язык, способный максимально точно передавать свойственные ей особенности. Вспомним, как четок и лаконичен язык химических формул. Он позволяет химикам не только записывать ход химических процессов, но и предвидеть возможные соединения. Однако этот язык, несмотря на всю его важность, не распространяется на другие области знания. В этом отношении язык математических формул обладает несравненно большей универсальностью. Об этом прекрасно было сказано французским физиком нашего века Луи де Бройлем: «...где можно применить математический подход к проблемам, наука вынуждена пользоваться особым языком, символическим языком, своего рода стенографией абстрактной мысли, формулы которой, когда они правильно записаны, по-видимому, не оставляют места ни для какой неопределенности, ни для какого неточного истолкования»*).

Заметим, что математическая символика не только не оставляет места для неточности выражения мысли и расплывчатого истолкования написанного, но позволяет вдобавок автоматизировать проведение тех действий, которые необходимы для получения выводов. Мы проиллюстрируем эту мысль на двух простых примерах.

На протяжении XII—XVI вв. позиционная десятичная система записи чисел завоевывала мир. Рассказывая о занятиях К. Маркса математикой, мы имели возможность привести его высокую оценку изобретения этой системы для человечества. Пусть, для примера, нам нужно сложить числа

$$3{,}1415926535 \text{ и } 2{,}7182818284.$$

Обычным с первых лет школьной жизни способом мы находим, что искомая сумма равна 5,8598744819. Десятичная позиционная система записи обладает многими удобствами, в том числе и приспособленностью к проведению арифметических операций. Фактически действия сложения и вычитания производятся точно так же, как они производились с помощью простейшего арифметического инструмента — счетной доски или русских счет. Мы уже говорили о том, что пользование счетной доской по сути дела рано или поздно должно было привести к десятичной позиционной системе счисления, однако люди этого не замечали в течение столетий, если даже не тысячелетий.

Прежние системы записи чисел — старославянская с помощью букв алфавита и римская такими операционными возможностями

*) Де Бройль Л. «По тропам науки». М., Изд-во «Иностранной литературы», 1962, с. 326.

не обладали. Ведь при сложении двух чисел, записанных по римской системе,— MMDCXXV и CCCXXIII — мы лишены оперативной наглядности. Еще хуже со сложением чисел в старославянской записи. Для примера, числа 372 и 963 имеют такие записи в славянских обозначениях ТОВ и ЦЕГ. Спрашивается, разве эти обозначения помогают действиям сложения, вычитания, а тем более умножения и деления?

Для множества очень важных вопросов строительной механики, геодезии, физики, экономики, разных вопросов инженерного дела их математическая формулировка сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с соответствующим числом неизвестных. Очень часто число этих уравнений весьма велико — семьсот, тысяча и даже больше. В школьном обучении все учащиеся прошли через практику решения систем, состоящих из двух или трех уравнений, знают, что в привычной алгебраической символике необходимые действия осуществляются достаточно просто и трудности возникают лишь в том случае, когда решающий допускает небрежность и совершает ошибку. Более того, нет необходимости каждый раз производить какие-то особые рассуждения, поскольку они выполнены раз и навсегда для всех подобных систем. Применение набора стандартных правил позволяет без принципиальных затруднений довести решение каждой такой задачи до конца. Конечно, и здесь тяготит «проклятие размерности» — чем больше уравнений и соответственно неизвестных, тем технически сложнее решение. Для современных же вычислительных машин тут появляются трудности иного характера: поскольку машина производит вычисления с определенной точностью, с увеличением числа операций накапливаются ошибки вычислений.

Представим себе теперь на минуту, что мы лишены языка математических символов и в нашем распоряжении имеется только обычный разговорный язык. В таком положении находятся, например, все, кто должен решать алгебраические задачи арифметическими средствами. При этом возникают немедленно ненужные осложнения. Каждая задача становится особой проблемой, для которой нужно разрабатывать специальную систему рассуждений. Самый простой вопрос уже требует значительного умственного напряжения. Вспомним, как просто решаются сложные арифметические задачи, когда для их решения используются простейшие алгебраические символы, и как сложно решать их чисто арифметическим путем. А ведь мы рассмотрели сейчас одну из самых простых задач, с которыми постоянно приходится сталкиваться и в теории, и в практической деятельности.

В качестве второго примера рассмотрим вычисление площадей и объемов, длин дуг и поверхностей. За две с лишним тысячи лет были решены лишь несколько таких задач — были найдены площади прямоугольника, треугольника и, значит, площади любых многоугольников, а также круга и сегмента параболы. С открытием же интегрального исчисления разыскание площадей, длин дуг, объемов тел превратилось в чисто техническую проблему. Известно, что Кеплер нашел объемы более восьмидесяти тел вращения. Если в древности разыскание площади сегмента параболы потребовало гения Архимеда, то теперь площади куда более сложных фигур способен разыскать любой студент высшего технического учебного заведения на втором году обучения.

Математическая символика позволяет выполнять и ряд других функций: сжимать запись информации, делать ее легко обозримой, а также удобной для последующей обработки. Это относится ко всей математике, во всех ее разделах. Для примера, обширные статистические сведения удается посредством таблиц и аппроксимирующих распределений сжать в короткую табличку или же в одну строку формулы.

В последние годы появилась новая линия в развитии формальных языков, связанная с вычислительной техникой и использованием ЭВМ для управления производственными процессами, информационными системами, линиями связи, а также для решения экономических и организационных задач. При этом необходимо осуществить общение с машиной, надо разработать такие правила, которые позволяли бы ей самой в каждый момент самостоятельно выбирать правильное в данных условиях действие. Но машина не понимает обычную человеческую речь, с ней нужно проводить диалог на доступном ей языке. Этот язык не должен допускать разночтений, неопределенности, недостаточности или чрезмерной избыточности сообщаемой информации. В настоящее время разработан ряд формальных языков, с помощью которых машина однозначно воспринимает сообщаемую ей информацию и действует с учетом создавшейся обстановки. Понятно, что сам процесс управления производится не посредством только формальных языков, но в первую очередь на базе разработанной математической модели самого явления. Оба эти момента и делают электронные вычислительные машины столь гибким инструментом при выполнении сложнейших вычислительных работ и при проведении последовательностей логических операций.

Теперь вполне естественно задать себе следующий вопрос: не приведут ли использование формальных языков и математизация наук к отмиранию обычного языка в научных исследованиях и в практическом общении людей? Об этом мечтал еще Г. Лейбниц, когда считал, что придет время и люди станут разрешать все спорные вопросы путем вычислений. Мы, однако, должны дать на поставленный вопрос отрицательный ответ, поскольку как формальные языки, так и наш повседневный язык имеют лишь ограниченные возможности. У каждого из них имеются свои сильные и слабые стороны. В результате каждая отрасль науки, каждый вид деятельности, в том числе и общение между людьми, вынуждены использовать и символические и обычные языки. Чтобы проследить мысль собеседника во всех тонкостях, недостаточен только математический язык формул, необходимы также пояснения, изложенные на обычном разговорном языке. Мы знаем, что если бы мы приступили к изложению курса математики в школе или педагогическом институте и пользовались только языком математических символов, то нас никто бы не понял и никто из наших учеников не узнал бы, куда его ведут. Точно так же, если бы мы попытались изложить тот же курс без математических символов и использовали только разговорный язык, то и из этого ничего бы не получилось, но уже по другой причине. Дело в том, что язык формул прекрасно приспособлен к получению логических следствий из первичных предпосылок, но он не может вывести нас за пределы уже сложившихся понятий и представлений. На математическом языке невозможно проведение далеко идущих аналогий (но он может быть и действительно является полезным для их получения) или неожиданных индуктивных выводов. Так его сила превращается в какой-то степени в слабость. И здесь ему на помощь приходит обычный неформализованный язык с его неисчерпаемым богатством оттенков и возможностей. В еще большей степени сказывается сила обычного языка при выражении эмоций. В полной мере сила неформализованного и формализованного математического языков проявляется лишь при их совместном использовании. Тогда удается подметить далеко идущие аналогии между явлениями и имеющимися закономерностями, выясняется, что разные по своему физическому характеру процессы подчиняются одним и тем же математическим законам.

Сейчас уместно сказать, что система математических знаков вырабатывалась на протяжении столетий и удивительно, что многие привычные нам всем обозначения, такие, как $+$, $-$, π, e и ряд других, появились сравнительно недавно. Так, знаки $+$ и $-$ были введены в употребление в Германии в XV веке, а до этого употреблялись многие другие обозначения, например p и m (от латинских слов plus и minus). Число π было введено в употребление в 1706 г. английским математиком Джонсом, а число e свое обозначение получило от Л. Эйлера в 1736 г. Вообще Л. Эйлер ввел ряд удачных обозначений, которые прижились и остались навсегда в науке и в практических применениях. Так, ему принадлежат обозначения $i=\sqrt{-1}$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, Δx — для приращения аргумента, Σ для обозначения суммы, $f(x)$ для обозначения функции. Знак $\lim\limits_{n\to\infty}$ для обозначения предела появился и вошел в употребление только в XX веке, а еще у У. Гамильтона (1805—1865) обозначение было несколько иным, $\lim\limits_{n=\infty}$, которое не подчеркивает изменение аргумента n до бесконечности (или до другого предельного значения), а считает n актуально бесконечным. Для школьного преподавателя полезно знать, что обозначение степени a^k было введено в 1637 г

Р. Декартом (1596—1650), а корня $\sqrt[k]{a}$ — чешским математиком К. Рудольфом (ок. 1500—1545). Для логарифма обозначение log в 1634 г. ввел И. Кеплер (1571—1630). Символ $\arcsin x$ был введен лишь в 1772 г. Ж. Лагранжем (1736—1813); им же были введены обозначения y' и $f'(x)$ для производной (1770). Символы умножения и деления ($\cdot$ и :) принадлежат Г. Лейбницу (1646—1716): второй символ был им предложен в 1684 г., а первый — в 1698. Знак абсолютной величины $|a|$ принадлежит К. Вейерштрассу (1815—1897), он ввел его в 1841 г. Укажем еще на три символа $=$, $<$ и $>$. Первый из них был предложен в 1557 г. английским математиком и врачом Р. Рекордом (1510—1558), а два остальных — в 1631 г. английским математиком Т. Гарриотом (1560—1621).

Мы не будем перечислять дальше даты рождения символов, которые уже укоренились в математике и широко используются в школьной практике. Это тема особого разговора.

§ 3. Источники познавательной силы математики

Как уже говорилось, математика в наше время находит широкое применение при решении самых разнообразных проблем науки и практики. Естественно в связи с этим спросить себя: в чем же заключаются эти возможности математики, откуда берется ее познавательная сила? Как может наука, непосредственно не связанная с определенными явлениями природы или же с техническими процессами, успешно использоваться ими, более того, оказаться одним из основных методов исследования, а также формулирования результатов в ряде областей знаний? Чем, наконец, вызвано то, что в разные исторические эпохи для принципиально различных задач математические методы оказывались полезными, вносили определенность постановкам задач и точность их решения в весьма сложных и запутанных ситуациях?

Прежде всего напомним, что развитие математики всегда было тесно связано с запросами практики, во все эпохи волновавшими общество. Нередко новые задачи практики не укладывались в уже разработанные математикой схемы и методы решения. Более того, в математике порой даже отсутствовали необходимые понятия, на языке которых можно было бы достаточно удовлетворительно описывать изучаемые явления. Для примера укажем, что до тридцатых годов нашего столетия отсутствовало понятие случайного процесса, а в физике многие явления (процессы диффузии, броуновского движения и др.) нуждались в адекватном математическом языке. Необходимость создания теории случайных процессов назрела не только в физике, но и в биологии (динамика развития популяций), и в инженерном деле (в первую очередь задачи телефонной связи). Работами ряда математиков были сделаны первые решающие шаги в этом направлении. Естественно, что при этом математиков в первую очередь интересовали не естественнонаучные, а собственно математические вопросы: выделение основных понятий, выяснение связей между числовыми или функциональными характеристиками явления, выделение интересных частных случаев, получение уравнений, описывающих изучаемые явления, вывод следствий из сделанных предпосылок.

Математик, принявшись за решение какой-нибудь определенной задачи естествознания или житейской практики, вынужден отвлекаться от множества особенностей данного явления и сосредоточивать внимание лишь на некоторых из них. Так, при математическом изучении движения планет Солнечной системы нас в первую очередь интересуют указание их положения в каждый момент времени, законы их движения, действующие силы притяжения, выяснение влияния Солнца и других планет на движение данной планеты. С целью получения ответов на интересующие нас вопросы мы идеализируем реальное явление и рассматриваем не само явление, а некоторую идеализированную схему, или, как принято теперь говорить, математическую модель, явления. Так, в нашем примере мы строим модель движения планет Солнечной системы и в этой модели ищем ответа на поставленные вопросы. В этой модели планеты и Солнце считаются математическими точками, в которых сосредоточены их массы. Естественно, что при этом моделирование несет с собой неизбежное абстрагирование от реального явления и подмену его изучения изучением модели. Математические средства (понятия, уравнения, символика) должны соответствовать избранной модели.

Как правило, оказывается, что вводимые математические понятия имеют значение не только для данной частной задачи, но оказываются применимы в ряде других практических задач, которые по своему физическому характеру резко отличны от первоначальной. Введенные понятия получают большее значение, и им начинают уделять повышенное внимание. Так, понятие алгебраических уравнений первой степени возникло еще в Древнем Вавилоне, где умели составлять и решать задачи, сводящиеся к двум или трем уравнениям первой степени с двумя и тремя неизвестными. Потребовались тысячелетия, прежде чем было замечено, что решение систем уравнений важно для множества задач, очень различных по своему реальному характеру. Появилась необходимость в создании теории их решения и тем самым избавлении от утомительного повторения одних и тех же рассуждений фактически по одному и тому же поводу, но для двух, трех, пяти неизвестных.

Здесь следует сделать одно замечание. В познании окружающего нас мира человечество идет постепенно, прибавляя к уже накопленным знаниям новые, порцию за порцией. Каждое явление познается шаг за шагом и далеко не во всей его сложности. Познание идет отдельными ступенями, отдельными этапами, и каждому последующему поколению есть что добавить к тому, что стало известно, уточнить, а то и существенно продвинуть приобретенные ранее знания. Это обстоятельство приводит к тому, что математические приемы и представления, вполне достаточные на определенном этапе познания явления, могут оказаться и, как правило, оказываются недостаточными на новом его этапе. В результате появляется необходимость в расширении объема имеющихся понятий, а то и создание новых, ранее отсутствовавших.

Проиллюстрируем сказанное на примерах. Счет предметов в давным-давно минувшие времена привел к введению целых положительных чисел. Хорошо известно, что этот этап развития понятия числа занял много тысячелетий. Пока люди ограничивались простым счетом, необходимости расширения содержания понятия числа не было, но как только возникла необходимость в делении предметов и выполнении измерений, так сразу же появилась потребность в расширении понятия числа и введении рациональных дробей. Точно так же рассмотрение алгебраических уравнений первой степени и запросы практики, в частности удобство записи значений величин, которые можно понимать в двух (противоположных) смыслах: температура, движение по прямой и т. д. — ввели в обиход отрицательные числа. Геометрические задачи и квадратные уравнения привели к квадратичным иррациональностям. На этом процесс развития понятия числа до естественных границ не прекратился, и только в прошлом веке стало ясно, каков тот объем объектов, который завершает естественное развитие понятия числа.

Рассмотрим теперь еще следующую иллюстрацию к сказанному. В конце прошлого века был изобретен самолет, и естественно возникла задача изучения его движения в полете. Какие силы действуют на самолет в полете, откуда берется подъемная сила и как ее вычислить, как зависит скорость самолета от формы крыльев и фюзеляжа? Эти и сотни других вопросов возникли уже на заре самолетостроения. Они были связаны не с чистой страстью человека узнать неведомое, а с появившейся практической необходимостью. Такие задачи возникли впервые, самолеты летали и порой разбивались. Во весь рост возникла задача создания и развития теории полета аппаратов тяжелее воздуха, причем такой теории, которая позволяла бы заранее вычислять их поведение в полете, даже до того, как будет построен данный самолет.

Привычные пути решения задач механики, разработанные Ньютоном, Лагранжем, Лапласом и другими, оказались недостаточными. Требовалось искать новые пути решения, новые подходы к новым задачам. Эти задачи увлекли ряд ученых, в том числе Н. Е. Жуковского. Вскоре были получены первые результаты, исходившие из предположения, что воздух является несжимаемой жидкостью, или, как принято говорить, идеальной жидкостью. Опыт показал, что это предположение для тех невысоких скоростей, которые были тогда достигнуты, вполне удовлетворительно. Так было положено начало новой науке — аэродинамике. Само собой разумеется, что исследователи отдавали себе ясный отчет в том, что воздух является далеко не идеальной жидкостью и что, в частности, он сжимаем. Однако специально организованные эксперименты и наблюдения показали, что при скоростях полета до 300 км/ч сжимаемость воздуха несущественна и при расчетах самолета ею можно пренебречь. Однако по мере того как скорость полетов возрастала, гипотеза идеальной жидкости уже переставала удовлетворять практику, и старая теория начинала приводить к серьезному расхождению с истинным положением дел. В результате возникла необходимость отказаться от старых предпосылок и строить новую аэродинамику, в которой следовало отказаться от гипотезы идеальной жидкости и перейти к рассмотрению воздуха в качестве реальной сжимаемой жидкости. Естественно, что при этом пришлось существенно обновить используемый математический аппарат.

На этом прогресс аэродинамики не остановился, и переход скоростей через так называемый звуковой барьер потребовал нового совершенствования теории и новых математических средств исследования. При этом выиграли и практика самолетостроения, и аэродинамика. Разработанные теперь методы аэродинамики и математики позволяют заранее просчитывать многие варианты конструкций до эксперимента, до построения опытных экземпляров, а тем самым и до испытательных полетов заранее отбросить множество малоперспективных конструкций. Аэродинамика, возмужавшая на решении ответственных задач, обзавелась такими сильными методами, которые позволяют решать множество вопросов самолетостроения, и не только его.

В частности, появилась возможность производить расчеты конструкций космических ракет, траекторий их полета, управляющих воздействий, необходимых для корректировки траектории и пр. Математика же была подведена к постановке ряда вопросов, которые без воздействия аэродинамики не могли бы даже появиться, по крайней мере в обозримые сроки. Поиски ответов на эти вопросы привели к разработке ряда новых глав математики.

Теперь мы можем подвести некоторые итоги и ответить на поставленные ранее вопросы. В чем же состоит причина познавательной силы математики? Чем вызывается то, что математика, по мере того как она делается более абстрактной и более общей, приобретает новые возможности познания окружающего нас мира?

Причин этому много. На первом месте следует указать, что математическое абстрагирование осуществляется не произвольно, а на базе уже накопленных знаний и созданных понятий, на базе тех требований, которые предъявляла практика в прошлом, на базе требований практики современных. Новые, более общие понятия строятся так, чтобы старые, уже оправдавшие себя, вошли в них в качестве простейших естественных случаев и чтобы они могли охватить то, что старые понятия не были в состоянии удовлетворительно описать. Таким образом, математические теории, став более общими, не теряют и тех объектов исследования, которые изучались ими ранее. Вспомним еще раз изменение содержания понятия числа: целые положительные числа в пределах нескольких первых единиц, весь ряд целых положительных чисел, рациональные положительные дроби, отрицательные числа, отдельные иррациональные числа, все множество действительных чисел, комплексные числа. По мере расширения понятия числа расширялись и интеллектуальные возможности человека, и его практические возможности. Никакие арифметические действия над элементами множества действительных чисел уже не способны вывести нас за пределы этого множества При таком положении дел понятия математики становятся более гибкими и приобретают способность охватить более широкий круг объектов, подлежащих изучению. Математические же теории приобретают значительно большие возможности для приложений, поскольку больший круг объектов попадает под действие их обобщенных правил действия.

Далее следует отметить, что каждый раз, когда математические средства оказываются недостаточными для изучения явлений, интересующих практику, наука ищет и рано или поздно находит новые средства, которые позволяют лучше, полнее и точнее описывать свойства и особенности этих явлений. В результате математика и ее методы исследования не остаются на месте, а непрерывно подвергаются процессу совершенствования, обновления и обогащения. И в этом процессе совершенствования практика играет значительную, если не сказать решающую, роль. Вспомним на минуту замечательный период создания основ математической физики, начавшийся в первой половине XVIII века. Тогда Д. Бернулли заложил основы математической гидродинамики, Л. Эйлер широко развил теорию движения твердого тела. Позднее Ж. Фурье положил начало математической теории распространения тепла, а М. В. Остроградский перенес и дополнил эту теорию распространением тепла в жидких средах. Тогда же в начале XIX века О. Коши заложил основы теории упругости. Привычных средств математического исследования для разработки этой новой теории оказалось недостаточно, появилась настойчивая необходимость в создании и разработке того математического аппарата, который нужен для развития математической физики. Этим аппаратом явились дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Наше время с его стремительным прогрессом физики привело к глубокому изменению средств математики, которые она использует. Наряду с уравнениями математической физики потребовалось использовать теорию вероятностей, создавать теорию случайных процессов, функциональный анализ, применять ряд разделов современной алгебры. В пятидесятые годы выяснилось, что для физики понятие функции, к которому мы привыкаем с нашего математического детства, оказалось недостаточным. Потребовалось ввести более широкое понятие обобщенных функций. В настоящее время теория обобщенных функций представляет собой значительную ветвь современной математики, которая находит широкое применение в ряде областей знания, а не только в физике.

Наконец, мы должны отметить, что и те ветви математического знания, которые возникли не в результате требований практики, а в силу внутренних потребностей самой математики, не остаются изолированными от требований практики. Дело в том, что развитие нового в математике опирается на старые области математической теории, которые вобрали в себя требования практики прежних эпох. Ученые же, которые создают новые математические теории, казалось бы, без видимого воздействия на них практических требований, в действительности незаметно для самих себя отражают в своих построениях идеалы своего века, нужды новейших требований общественной практики. Те же направления математической мысли, которые совсем не находят теоретических или практических применений, как правило, теряют к себе интерес исследователей и постепенно отмирают.

В результате мы приходим к выводу, что прикладные возможности математики неограниченны по той причине, что математика не остается на месте, а постоянно меняет свое состояние, включая в свой состав новые идеи, понятия, методы, объекты исследования. В этом непрестанном ее изменении и развитии, обобщении, обновлении и совершенствовании активное участие принимает практика во всем ее разнообразии.

Вместе с ростом математики вширь происходит и другой процесс — процесс углубленного анализа уже накопленных математических ценностей. Это процесс внутренней перестройки и более совершенного расположения накопленного материала, который неизбежно приводит к необходимости доработки, переосмысливания, дополнения. При этом нередко случается, что новые области математики, возникшие в процессе внутреннего развития, оказываются важными и для практики, получая значительные применения. Так случилось с математической логикой, которая первоначально развивалась исключительно для внутренних нужд математики. Сейчас же она является необходимым орудием практики, в частности практики использования ЭВМ.

Следует заметить, что математика развивается не сама по себе, а в результате деятельности людей. Вот почему так важно в век ускоренного научно-технического прогресса иметь в стране обширный круг лиц, способных раздвигать пределы науки, своевременно реагировать на потребности практики и решать ее задачи. При этом важно, чтобы решение было опережающим, поскольку прогресс техники, экономики, сельского хозяйства происходит лишь в том случае, когда имеются новые, более перспективные идеи и эти идеи доводятся до практического осуществления. В тридцатые годы, когда скорости самолетов были 150—250 км/ч, мечта конструкторов состояла в том, чтобы повысить скорости до 500—600 км/ч и соответственно потолок полета до 7—8 км. Практическая польза от этого просматривалась легко: на больших высотах меньше плотность воздуха и легче добиться больших скоростей, а также экономии горючего. Большие скорости позволяют быстрее осуществлять перелеты и очень важны для военной авиации.

Математическое образование получают все школьники, начиная с первого года обучения и до последнего класса. Само собой разумеется, что лишь небольшая часть обучающихся впоследствии станет сама развивать математику. Но применять математические методы и знания станут все. Поэтому важно, чтобы в процессе обучения математика возникала перед школьниками не только в качестве системы логических правил и дедуктивных доказательств, но и в качестве метода познания, в качестве средства решения вопросов практического характера. Школа должна открыть своим воспитанникам возможности математики в повседневной практике, использовании ее в самых разнообразных ситуациях. Но мало развивать только убеждение в ценности и силе математических методов для решения задач практики, необходимо также привить любовь к таким применениям и необходимые для этого первичные навыки. Очень важно, чтобы учащиеся видели прикладные возможности всех разделов математики и прочувствовали значение строгих логических рассуждений для всех видов деятельности.

Когда школьник переходит в профессионально-техническое учебное заведение или в техникум, содержание курса математики следует приблизить к интересам специальных дисциплин. Приблизить, но не подчинить. Математика должна оставаться математикой, но в ней должно быть выделено прикладное начало, которое должно помочь решению специфических вопросов приобретаемой специальности.

Этому должно способствовать и преподавание математики в пединституте: будущий учитель должен быть не только знаком с принципиальными вопросами самой математики, с методикой ее преподавания, но и с тем, как она используется в жизни, какое значение она имеет для научно-технического прогресса. Для педагога особенно важно, чтобы его подготовка не была узконаправленной. А для этого будет хорошо, если студент-математик узнает о примерах использования своей науки и в инженерном деле, и в сельском хозяйстве, и в строительстве, и в медицине, и в физике, и в биологии.

На всех ступенях обучения учить следует так, чтобы возбуждать интерес к познанию окружающего нас мира, пытливость ума, стремление к самостоятельному осмысливанию ситуаций и критической оценке предлагаемых подходов к решению стоящих перед обществом задач. Учить следует так, чтобы полученные знания не оставались бесполезным грузом, а постоянно находились под рукой в готовности к использованию в актуальных делах. Но при таком подходе к делу неизбежно время от времени пересматривать как содержание обучения, так и его характер. Это особенно важно в наше время, когда объем научных знаний растет стремительно и научные знания находят быстрое использование в промышленности, сельском хозяйстве, на транспорте и в быту.

Нередко приходится наблюдать стремление преподавателей (особенно в вузах) передать учащимся как можно больше сведений, заставить их решить как можно больше задач и примеров и тем самым набить руку в применении тех или иных правил. Однако следует не набивать руку, а воспитывать разум. Нельзя забывать, что привычка познавать и мыслить несравненно важнее, чем сотни заученных правил, чем десятки выученных назубок алгоритмов действий. Теперь одних формальных трафаретных знаний недостаточно, необходимо приобретать умение вникать в суть возникающих вопросов и глубоко самостоятельно мыслить. Основная цель обучения состоит не в том, чтобы набить голову правилами действий, а в том, чтобы превратить знания в орудие активного действия, приучить разум размышлять, а не только запоминать; воспитывать стремление самим искать пути решения даже тогда, когда задача не попадает под известные правила.

В знаменитых «Философских тетрадях» В. И. Ленин так определил путь познания: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике»*)

Эту мысль Ленина следует сделать принципом всего обучения на любых ступенях от школы до аспирантуры. Однако, как правило, в реальном преподавании остается лишь средняя часть этой формулы, обучающийся видит лишь создание абстрактной теории, и ему никто не показывает, как практика приводит к необходимости теоретических исследований и как развитая теория позволяет решать задачи практики на более высоком уровне. А между тем все три стороны познания исключительно важны как для формирования мировоззрения, так и для формирования учащегося, его характера, его устремлений.

Действительно, показ происхождения теории из насущных задач практики, прослеживание того, как возникали понятия теории из привычных, а порой и повседневных представлений, позволит учащимся выработать собственный взгляд на происхождение теоретического знания. Точно так же показ действенности математической теории при решении задач практики позволит молодым людям правильно оценить место теоретического знания в

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч. т 29, с. 152—153

жизни общества. Вот почему так важно превратить приведенное ленинское положение в фундамент всей системы математического образования. Конечно, при изложении различных дисциплин в разной степени следует подчеркивать каждую составную часть триады Ленина. При этом, естественно, от курса к курсу будет изменяться и наполняться новым содержанием представление о «живом созерцании» и о «практике». Но всегда следует вскрывать те связи, которые существуют между явлениями реального мира и проблемами практики, с одной стороны, и миром понятий, идей и результатов математической науки — с другой.

Лучшие педагоги прошлого постоянно подчеркивали недостаточность и педагогическую ошибочность чисто абстрактного изложения математики и настаивали на том, чтобы математика получала зримые черты метода познания окружающего нас мира. В этом отношении значительный интерес представляют в замечательной брошюре М. В. Остроградского и А. Блума «Размышления о преподавании» следующие слова: «Кто из нас не видел, что из пятидесяти соучеников по меньшей мере сорок испытывали отвращение и падали духом из-за абстрактности идей, преподносимых до того, как они становились понятными на примерах, взятых из житейской практики»*). А ведь не только в прошлом веке, но и сейчас при изложении математики так часто забывают об огромном значении примеров практического содержания для пробуждения интереса учащихся к предмету и формирования правильного представления о назначении научных знаний. Чисто абстрактное изложение может принести пользу только небольшому числу учащихся, да и то при условии, что они уже достигли достаточно высокого уровня развития. Но и в этом случае указания на возможное практическое использование полученных знаний не только полезно, но и необходимо.

Само собой разумеется, что приближение математического образования к практике ни в коем случае не должно означать превращения ее в служанку на побегушках. Она должна сохранять свою логическую структуру и строгость изложения, но вдобавок к этому следует выяснять происхождение ее задач из недр практики и иллюстрировать широкие возможности и силу математических методов для исследования естественнонаучных и прикладных проблем.

Такой подход к математическому образованию позволит добиться того, что абстрактность математики станет восприниматься не как отход от задач практики и повседневной жизни, а как неизбежный прием изучения явлений реальной действительности с позиций свойственных им количественных закономерностей, присущих им логических связей и геометрических форм. Этот способ, который выделяет интересующие нас соотношения в чистом

*) М. В. Остроградский. Пед. наследие. Документы о жизни и деятельности. М., Физматгиз, 1961, с. 35.

виде, очищенные от многочисленных посторонних наслоений, позволяет избавлять выводы математики от привычных ассоциаций, связанных с частными проявлениями изучаемых явлений. Такое отделение математических понятий и результатов от породивших их явлений дает возможность доказанные математические результаты переносить и на многие другие явления, обладающие теми формальными особенностями, которые свойственны математическим понятиям и полученным на их базе выводам Именно этим обстоятельством объясняется широкая применимость одного и того же математического аппарата к явлениям различной физической природы. Учащиеся при этом видят силу абстракций и их необходимость.

Использование математики в инженерных, естественнонаучных, экономических и производственных исследованиях не всегда проходит без затруднений: ни сразу удается построить удовлетворительную математическую модель явления, подобрать необходимые математические средства исследования, которые были бы достаточно адекватны изучаемому явлению. Но разве в какой-нибудь области знания и деятельности удается сразу, без забот и трудностей найти истину в последней инстанции? Разве не всюду и всегда приходится первичную идею уточнять, улучшать, развивать, прежде чем она превратится в действенную силу, позволяющую применять ее с пользой для познания и практики? Ведь каждый шаг в познании, каждое открытие представляют собой лишь промежуточный шаг в процессе познания природы и ее закономерностей или же познания явлений социального характера. И сами эти закономерности — лишь вехи на неограниченном пути познания. В этом отношении прекрасны следующие слова В. И. Ленина, сказанные им в произведении «Материализм и эмпириокритицизм»: «...человеческое мышление по природе своей способно давать и дает нам абсолютную истину, которая складывается из суммы относительных истин. Каждая ступень в развитии науки прибавляет новые зерна в эту сумму абсолютной истины, но пределы каждого научного положения относительны, будучи то раздвигаемы, то суживаемы дальнейшим ростом знания»*).

§ 4. Математические модели

Мы уже упоминали раньше о том, что, прежде чем какое-нибудь явление природы, технический (или вообще какой-нибудь) процесс подвергнуть математическому изучению, его упрощают, т. е. из всего многообразия свойств, присущих явлению, вводят в рассмотрение лишь некоторую их часть, а также делают некото-

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 137.

рые предположения о связях между характеристиками самого явления и внешней средой. Такая упрощенная схема явления, или, как принято теперь говорить, его модель, подвергается математической обработке. Чтобы модель могла быть изучена, вводятся в рассмотрение характеристики явления, или, как принято говорить в инженерном деле, определяющие явление параметры. Эти параметры могут быть числами, векторами, тензорами, функциями и т. д.

В том случае, если для двух или нескольких явлений модели с формальных позиций оказываются одинаковыми, их математическое изучение ничем не отличается, их математические модели совпадают. Одновременно заслуживает быть отмеченным и то обстоятельство, что для одного и того же явления можно создать не одну, а несколько различных моделей. История науки оставила нам в наследство множество примеров такого рода. Скажем, в оптике рассматривались несколько моделей распространения света: корпускулярная, волновая, электромагнитная. Для них были чисто математическим путем выведены многочисленные важные закономерности количественного характера, и эти закономерности хорошо подтверждались экспериментальным путем. Каждая из названных моделей требовала особого математического подхода для своего развития и соответствующих специфических математических средств исследования. Так, корпускулярная (геометрическая) оптика использовала средства евклидовой геометрии и привела к выводу законов преломления и отражения лучей света. Волновая модель теории света потребовала новых математических идей — рассмотрения тригонометрических функций — как для подтверждения уже известных результатов, так и для вывода новых (явлений интерференции и дифракции). Чисто аналитическим путем были открыты первичные результаты, относящиеся к интерференции и дифракции, которые ранее опытным путем не наблюдались. Волновая теория навела на те эксперименты, которые блестяще подтвердили большую близость этой модели к реальности. Геометрическая же оптика оказалась бессильной для вывода новых явлений. Так были получены веские аргументы в пользу волновой теории. Однако корпускулярная модель распространения света не отмерла. Для определенного круга задач она в вычислительном отношении даже предпочтительнее волновой.

Полезно еще раз подчеркнуть то, что модель не тождественна явлению, она только дает некоторое приближенное представление об его структуре. Эта модель может быть на первый взгляд очень грубой по сравнению с полной жизни и разнообразия красок реальностью и тем не менее давать вполне удовлетворительное описание действительности. Вспомним, что небесная механика со времени И. Кеплера и И. Ньютона исходила из такой модели устройства Солнечной системы: Солнце и планеты представляют собой материальные точки с соответствующими массами и между ними действуют силы тяготения по закону $F_{1,2} = f \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где $F_{1,2}$— сила тяготения между небесными телами 1 и 2 с массами m_1 и m_2 и расстоянием между ними, равным r, f — постоянная тяготения. Материальные точки, моделирующие планеты, расположены в их центрах тяжести.

Как ни груба такая модель на первый взгляд, она вполне удовлетворительно описывает движения планет и дает возможность прогнозировать взаимное их положение на небосводе. Более того, за последние полтора столетия она дважды позволила путем вычислений предсказать наличие в мире неизвестных планет Солнечной системы, до того не наблюдавшихся астрономами. Исходя из «неправильностей» в движении крайних планет Солнечной системы, было сделано предположение, что они вызваны наличием еще одной неизвестной планеты. Сравнив фактические отклонения с теми, которые получались в предположении существования еще одной планеты, удалось вычислить неизвестные массу, расстояние до Солнца и положение на небосводе гипотетической планеты в заранее указанный момент. Так в 1846 г. была открыта планета Нептун в результате вычислений, выполненных независимо друг от друга У. Леверье и Дж. Адамсом. Подобные же вычисления, выполненные П. Лоуэлом, привели в 1930 г. к открытию девятой планеты Солнечной системы, получившей название Плутон.

Эта модель продолжает превосходно служить познанию и теперь, в период начала космических исследований. Однако отсюда совсем не следует, что она будет достаточна для всех случаев, которые встанут перед наукой. Несомненно, что уже и сейчас имеются задачи, в которых эта первичная модель небесной механики недостаточна и требует модификации или полной перестройки. Так, уже в начале нашего века ньютоновско-кеплеровская модель строения Солнечной системы не смогла объяснить возмущений в движении ближайшей к Солнцу планеты Меркурий. Эти объяснения позволила найти молодая тогда частная теория относительности А. Эйнштейна.

Заметим, что для науки мало создать математическую модель явления, т. е. перечислить исходные положения теории, необходимо найти тот математический язык, на котором удается описать в точных количественных терминах эту модель. Для описанной нами модели Солнечной системы такими терминами явились понятия математического анализа и аналитической механики. Недаром Ньютону принадлежат решительные шаги в создании той и другой ветвей математической науки. Это, так сказать, исходный пункт существования математической модели явления. Далее необходимо получить из сделанных предпосылок логические выводы. В рассмотренном нами примере модели Солнечной системы такие выводы были получены в небесной механике — науке о движении небесных тел, принадлежащих Солнечной системе.

Затем необходимо убедиться в том, что выводы развитой теории подтверждаются действительностью (опытом, наблюдениями). Модель явления хороша тем, что при ее опытной проверке мы можем проверять каждую из четко сформулированных предпосылок.

Создание математической модели — важный этап познания, поскольку он позволяет четко формулировать наши представления о структуре явления, характерных его особенностях, действующих в нем связях. Мы перечисляем сделанные нами предположения, и в ходе опытной проверки или же при сравнении реального течения процесса с вычисленным на базе предположений модели у нас появляется возможность оценить качество модели, так же как и каждого из сделанных предположений.

Остановимся теперь на одном иллюстративном примере, связанном с решением несложной, но важной инженерной задачи. В связи со значительной ролью технических систем в жизни общества все большее значение придается в наше время увеличению надежности изделий техники. Это достигается различными путями, одним из которых является резервирование, т. е. введение излишних для работы изделия элементов. Эти дополнительные элементы вводятся в техническую систему с одной-единственной целью — чтобы они вступали в работу в тот момент, когда основной элемент системы откажет. Запасное колесо автомобиля является как раз таким резервным элементом. Если вдобавок отказавший элемент направляется сразу на восстановление, то такие системы называются резервированными системами с восстановлением. Говорят, что резервированная система с восстановлением отказывает тогда, когда основной элемент и все резервные окажутся в нерабочем состоянии. Задача, которая при этом возникает, состоит в следующем: насколько резервирование с восстановлением увеличивает длительность безотказной работы системы?

Понятно, что так поставленная задача еще не представляет собой математического вопроса, поскольку нам, в сущности, еще ничего неизвестно. Пока это только словесная формулировка. У нас же еще нет базы, на которой мы можем строить логические рассуждения и выводить формулы, пригодные для инженерных расчетов. Нам нужно сформулировать математическую модель задачи. Само собой разумеется, что она не может быть взята «с потолка», в ее основе должны быть ранее проведенные наблюдения и инженерный опыт. В результате длительных обсуждений с учетом длительных наблюдений и экспериментов была предложена следующая математическая модель, которая теперь широко принята.

1) Длительность безотказной работы элемента является случайной величиной с некоторым распределением вероятностей $F(x)$.

2) Длительности безотказной работы последовательно вклю-

чаемых элементов — независимые случайные величины с одним и тем же распределением вероятностей.

3) Отказ элемента обнаруживается немедленно.

4) После отказа элемент немедленно направляется в ремонт.

5) Длительность ремонта — случайная величина, с некоторым распределением вероятностей $G(x)$.

6) Если имеется хотя бы один исправный элемент, замена отказавшего элемента на исправный происходит мгновенно.

7) Отремонтированный элемент немедленно поступает в резерв.

8) Длительность ремонта не зависима от того, как долго продолжался работоспособный период элемента, и от того, сколько ремонтов осуществило восстанавливающее устройство.

9) Ремонт полностью восстанавливает свойства элемента.

Только что сформулированные предпосылки составляют математическую модель нашей задачи. Она уже может служить основой для необходимых выводов. Мы их проведем в одном из параграфов третьей главы для случая, когда имеется единственный резервный элемент и этот элемент не меняет своих свойств, пока он находится в резерве (холодный или ненагруженный резерв).

В приведенной нами модели особую неудовлетворенность могут вызвать пункты 4, 7, 9. Действительно, мы знаем, что каждая замена неисправного элемента на исправный требует некоторого, порой даже значительного, времени. Для того чтобы сменить у автомобиля колесо на запасное, нужно поднять на домкрате кузов автомобиля, отвернуть гайки, снять колесо, надеть сменное, вновь закрутить гайки и спрятать запаску в багажник. Точно так же направление в ремонт осуществляется не мгновенно. Девятый пункт нашей модели предполагает полное восстановление свойств отремонтированного элемента. К сожалению, такое возможно только в течение сравнительно короткого срока. Так, известно, что средняя длительность безотказной работы отремонтированного автомобиля составляет лишь около 60% от средней длительности безотказной работы нового автомобиля. Можно изменить эти пункты модели и тем самым несколько усложнить модель, а также полученные на ее основе результаты. Однако во многих случаях рассмотренная нами модель дает вполне удовлетворительные результаты, хорошо описывает реальную обстановку и дает возможность получать полезные для практики формулы и качественные выводы. Мне известно, что эта модель нашла применение в ряде ответственных задач управления технологическими процессами на химических предприятиях, устройств практически безотказного электроснабжения ответственных участков (операционных, систем управления и пр.).

Одной из самых древних математических моделей, несомненно, является геометрия Евклида. Это модель окружающего нас пространства и находящихся в нем предметов. Эта модель создавалась на протяжении тысячелетий и несет безотказную службу человеческому знанию в настоящее время, так же как будет ее нести и в будущем. Математические прямые, поверхности, линии, тела являются не чем иным, как отвлечением от реальных прямых, поверхностей тел, линий, пространственных предметов. Этот процесс отвлечения от наблюдаемой реальности продолжался длительный срок и оказался очень полезным для практической деятельности. История математики дает описание того, как геометрические понятия возникли из практических задач измерения полей, расстояний, подсчета объемов зернохранилищ. В связи с этим становится непонятным утверждение А. Эйнштейна, помещенное в его книге «Геометрия и опыт»: «...перед нами возникает загадка, которая столь беспокоила исследователей всех времен. Почему возможно такое превосходное соответствие математики с действительными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, независимо от всякого опыта? Может ли человеческий разум без всякого опыта, путем только одного размышления, открыть основу существующих вещей?»

Несомненно, что математика, в том числе и геометрия, является абстрактной наукой, предметом изучения которой являются объекты, определяемые теми свойствами, которые им приписываются в определениях и аксиомах. Однако сами эти определения и аксиомы появляются не по свободной воле ученых, а на основе абстрагирования от свойств реальных вещей. Именно это обстоятельство позволяет математике отражать в своих результатах свойства окружающего нас мира. При создании науки царит не произвол с введением понятий, а глубокий процесс отвлечения от несущественных (по тем или иным признакам) характеристик явления. Для примера, геометрическое понятие шара отвлечено от всех реальных свойств тел, выполненных из какого-то материала — дерева, пластмассы, металла; от их массы, плотности, упругих свойств и т. п. Мы отвлекаемся от всего этого и даже от реальной формы, а придаем геометрическим телам идеальную форму. Это позволяет нам делать выводы, относящиеся не только к идеализированному шару, но и к реальным шарам.

Точно так же понятие числа появилось в результате счета окружающих нас предметов. Это абстрактная модель числа предметов. Она создавалась на протяжении тысячелетий. Эту модель создали люди в результате практической деятельности и абстрагирующей деятельности разума. Этот факт следует из наблюдений над первобытными племенами, изучения материальной культуры народов прошлого, всего здания истории математики. Удивительными в связи с этим кажутся высказывания ряда далеко не ординарных представителей прошлого, которые мы сейчас приведем.

Беркли (епископ): «Целые числа — это знаки, которые бог дал людям, чтобы они правильно распоряжались вещами».

Кант (философ): «Понятие числа — врожденное понятие, которым человек располагает до всякого опыта».

Гельмгольц (физик): «На числа мы должны смотреть прежде всего, как на ряд произвольно выбранных знаков».

Дедекинд (математик): «Понятие числа я считаю совершенно независимым от представлений и воззрений на пространство и время: для меня оно чистый продукт законов нашей мысли; числа суть свободные создания человеческого духа и они служат средством, дающим нам легче и яснее постигать различие вещей».

Кронекер (математик): «Целые числа создал господь бог, все остальное — дело рук человеческих».

С такими позициями мириться никак нельзя, не только потому, что они ошибочны, но и потому, что они уводят мысль от необходимости искать истинное происхождение вещей, мешают и в настоящем строить правильные пути решения стоящих перед человечеством задач. Я приведу здесь слова профессора Московского университета М. Панкевича, произнесенные им 30 июня 1792 года в торжественной речи «Слово о подлинной цели математических наук»:

«Отведенный от природы отвлеченными умозрениями, обольстившийся ими до такой степени, что, забавляясь оными, не думал бы уже больше о самих вещах, к рассмотрению коих первые должны быть путями и средством, подобен бы был тому, кто заставлен будучи удалиться на время из своего отечества в другие пределы... не помышлял бы более о возвращении в оное».

Полезно заметить, что математические модели реальных явлений базируются на определенных эмпирических фактах, но одновременно являются результатом прогнозирующей мысли исследователя. Он размышляет не только о том, что уже известно, но и как может быть объяснено неизвестное. В связи со сказанным мне кажется полезной следующая довольно большая цитата из доклада известного физика В. Гейзенберга «Традиции в науке», который он произнес в апреле 1973 г. на симпозиуме, организованном Смитсоновским институтом и Национальной академией наук США по случаю 500-летнего юбилея со дня рождения Н. Коперника.

«Оглядываясь, таким образом на историю, мы видим, что у нас, по-видимому, очень мало свободы при выборе наших проблем. Ученые связаны историческим процессом, и выбор их, по-видимому, ограничен принятием решения — участвовать или нет в том развитии, которое произойдет с ними или без них».

Это важная позиция, которая соответствует концепциям исторического материализма и направлена против позиций свободной воли в развитии науки и ее понятий.

Далее Гейзенберг сказал:

«Существует всеобщее мнение, что наша наука [физика — *Б. Г.*] — эмпирическая и что мы черпаем наши понятия и наши математические построения из данных опыта. Если бы в этом заключалась вся правда, то, приступая к изучению новой области, мы должны были бы вводить лишь такие величины, которые можно непосредственно наблюдать, и формулировать законы природы лишь посредством этих величин. В молодости я верил, что именно такой философии следовал Эйнштейн в своей теории относительности. Но когда я впоследствии спросил об этом Эйнштейна, он ответил:

«Может быть, в этом и была моя философия. Но это все-таки чепуха. Никогда нельзя ограничиться в теории только наблюдаемыми величинами. Именно теория решает, что можно наблюдать».

В этом замечании он имел в виду, что когда мы переходим от непосредственных наблюдений, например черной линии на фотопластинке или разряда в счетчике,— к явлениям, которые нас интересуют, мы вынуждены пользоваться теорией и теоретическими понятиями. Мы не можем отделять эмпирический процесс наблюдения от математического построения и его концепции».

На мой взгляд, в этой цитате высказано очень важное суждение, которое еще не дошло до многих физиков и на которое математики практически не обращают внимания. Математическая модель явления не только создается на базе экспериментальных фактов и связанных с ними физических теорий, но оказывает и обратное влияние на физику: когда математическая модель создана, то она в довольно большой мере определяет, что должно быть определено экспериментатором, какие опыты следует ставить как для проверки теории, так и для обнаружения новых явлений, которые предсказывает новая теория. В двадцатых годах прошлого века после доклада, прочитанного О. Ж. Френелем в Парижской Академии наук по волновой оптике, присутствующие математики немедленно сделали выводы и заявили, что из его теории получаются такие-то явления, которые нужно подтвердить экспериментом. Эти эксперименты были произведены и блестяще подтвердили теорию. Вот пример того, как математическая модель заставляет экспериментаторов ставить новые опыты, подсказанные ею.

Подобная же картина имеет место не только в физике и в естественных науках, но и в технике, и в других областях применения математики: математическая модель в значительной мере предопределяет тот экспериментальный материал, который следует собирать, а также ту обработку результатов наблюдений, которую следует производить.

В настоящее время широко используется математическое моделирование и тогда, когда о физической структуре явления известно крайне мало. В этом случае строится гипотетическая модель и на ее основе выводятся следствия, уже доступные наблюдению. Понятно, что такие гипотетические модели зачастую не оправдываются опытом. В этом случае они живут недолго и быстро отмирают, уступив место другим моделям, позволяющим точнее познать природу вещей. Два года назад руководимая мной кафедра заключила договорные отношения с институтом кабельной промышленности на предмет построения математической модели старения изоляции электрических кабелей. Модель была нами предложена, на ее базе была построена математическая теория и предвычислены те сроки, в которые изоляция должна прийти в отказовое состояние. Прогнозы оправдались с поразительной точностью. Теперь мы ставим перед собой новые задачи не только теоретического плана, но и чисто прикладные. В частности, из соображений теории предложен метод значительного увеличения срока службы изоляции. Этот вопрос еще не вышел из начальной стадии, но есть все основания надеяться на успех. В данном примере речь идет как раз о такой гипотетической модели, поскольку экспериментальные выводы были весьма скудными.

Ценность гипотетических моделей неоспорима: они активизируют работу мысли, наводят экспериментаторов на принципиально новые эксперименты, позволяют продвигаться в познании реального мира и его явлений. История науки показывает, сколь большую роль сыграли научные гипотезы и построенные на их основе математические модели явлений. Вспомним хотя бы гипотезу строения Солнечной системы, предложенную Коперником. Вспомним, далее, модель строения атома, разработанную Резерфордом. Эта модель исходила из мысли, что атом построен примерно так же, как и Солнечная система: вокруг ядра атома вращаются по своим орбитам электроны. Сама модель оказалась недостаточной, и дальнейшее развитие науки ее отмело, но она вызвала к жизни многочисленные исследования, приведшие к современной атомной физике и к первым шагам на пути освоения энергии, таящейся в недрах атома.

В настоящее время возникает настоятельная необходимость обратить особое внимание на построение математических моделей в биологии, медицине, социальных науках. Они изучают явления исключительно сложные по своей природе и нуждаются для этого во всех методах, как уже разработанных наукой, так и тех, которые еще предстоит разработать. На очереди разработка математических моделей педагогики, но это сложный и длительный процесс. Для педагогических целей особенно важны модели, в которых разрабатывались бы вопросы, связанные с процессом мышления, сохранения внимания, работы памяти, поведения коллектива. Пока удовлетворительного решения этих вопросов еще нет, но если над ними упорно думать, то сдвинется с мертвой точки наше знание и в этой важнейшей области работы.

§ 5. Теоретическая и прикладная математика

За последние триста лет человечество проделало огромный путь от незнания к знанию, от знания неполного к более полному, от качественного познания к количественным закономерностям. Чем дальше наука продвигалась по пути разыскания количественных закономерностей, тем значительнее становилась роль математики и ее методов. Более того, чем шире круг применений математики, тем разнообразнее идеи и методы математики, которыми пользуются другие области знания. Постепенно целые ветви математического знания превращались из абстрактно-теоретических в прикладные, находящие многочисленные и важные применения в актуальной научной и общественной практике. На глазах моего поколения математическая логика превратилась из главы математики, предназначенной преимущественно для целей обоснования всей математики в целом, в область прикладной математики. И теперь математическая логика абсолютно необходима для вычислительной техники, для проблем информационного поиска, для целей управления производственными процессами. Жизнь не остается на месте, появляются новые проблемы, необходимость их решения. Математика не остается к этому безучастной, она ищет пути использования своих методов и результатов для изучения природы, технических, экономических и социальных процессов. Нередко при этом оказывается, что разработанных ранее методов недостаточно и требуются новые приемы исследования, новые методы. Нередко случается, что теоретическая математика, не зная о новых задачах, уже подготовила приемы их решения, разработала основы математического описания интересующих нас сложных явлений. Но это нужно увидеть, а для этого следует знать и успехи теории, и задачи практики.

Несомненно, что и в будущем математические методы будут все более расширять поле своих применений, а прикладная математика включать в себя все новые и новые ветви теоретической математики. Конечно, насущные вопросы практики вызовут также необходимость создания совсем новых направлений математической мысли. Только за последние пятьдесят лет прикладная математика (а значит, и теоретическая математика) обогатилась новыми составными частями — теория случайных процессов, теория оптимального управления, теория массового обслуживания, управление запасами, линейное и нелинейное программирование и др. Практика всегда будет оставаться одним из основных источников прогресса теоретической математики, а теоретическая математика будет в обилии снабжать практику методами исследования. Теоретическая и прикладная математика неразрывно между собой связаны, и я придерживаюсь той точки зрения, что в математике нет таких разделов, которые не могли бы найти применений теперь или в ближайшем будущем.

Нередко случается, что некоторые математики, увлеченные широтой теоретических возможностей своей науки, а также глубиной ее результатов, несколько свысока относятся к прикладной математике. Так, в статье Мэри Картрайт — известного английского специалиста по теории функций — содержатся такие слова: «Мой покойный учитель Г. Х. Харди относился к прикладной математике весьма неодобрительно»*). Однако законы развития науки сильнее личных симпатий и антипатий. По словам М. Картрайт, ее учитель гордился тем, что его результаты в области теории чисел никогда не найдут применений. Однако в дальнейшем эти, как ему казалось неприменимые вне математики факты, нашли серьезные применения в атомной физике.

Создается убеждение, что потенциально все серьезные математические теории и результаты рано или поздно найдут свои области применения и помогут продвинуться в каких-то направлениях практической деятельности дальше, помогут глубже понять законы природы, техники, экономики, организации производства, мышления ... Появляется убеждение в том, что математику только искусственно разделяют на теоретическую и прикладную, а в действительности каждая ее ветвь потенциально может превратиться в прикладную, а каждая прикладная ее часть одновременно является и теоретической. Скорее, пожалуй, не математика разделяется на теоретическую и прикладную, а математики в силу их воспитания и психологических особенностей подразделяются на прикладников и теоретиков. Конечно, это подразделение условно, и имеется большое число ученых, которые выступают в обоих качествах — и как теоретики, и как прикладники. Многочисленные примеры такого рода можно найти и в прошлом, и в настоящем. Напомним, что И. Ньютон, П. Лаплас, Л. Эйлер, П. Л. Чебышев, А. М. Ляпунов известны в науке не только тем, что они внесли исключительно большой вклад в прогресс теоретической математики, но и своими прикладными исследованиями в физике, механике, астрономии, артиллерии, космогонии.

Наряду с математиками такого рода, которые одинаково сильны как в развитии прикладной, так и теоретической математики, можно указать большую когорту ученых, которые имели «одну, но всепоглощающую страсть» — исследование проблем теоретической математики. Вот несколько имен, которые, по-видимому, должны быть отнесены именно к этой категории исследователей: Г. Лейбниц, Э. Галуа, А. Лебег, Н. Н. Лузин, П. С. Александров, П. С. Новиков, И. М. Виноградов. Все они ставили перед собой чисто теоретические проблемы и всю жизнь

*) Картрайт М. «Математика и математическое мышление» «Математика и кибернетика». М., «Знание», 1971, № 10, с. 36.

занимались ими, развивая и расширяя поле известного в теоретической математике, без того, чтобы интересоваться тем, какое применение в естествознании или же в общественной практике найдут их идеи и полученные ими общие результаты.

Такого рода исследователи и исследования крайне нужны не только для продвижения вперед математики как абстрактной науки, они оказывают значительное воздействие и на развитие прикладных ее аспектов. Действительно, математики-теоретики создают общие концепции, ищут математические закономерности в наиболее общем виде, определяют естественные границы применимости тех или иных результатов, развивают новые представления и понятия. Размышления же об общих принципах полезны, поскольку они дают единый подход к решению большого числа проблем, которые ранее считались никак между собой не связанными. Тем самым создается единый подход к решению ранее разнородных вопросов, а это позволяет едиными рассуждениями рассматривать множество частных вопросов. Именно это обстоятельство дало основу крылатому выражению австрийского физика Л. Больцмана: «Нет ничего практичнее хорошей теории».

Для развития науки, для прогресса наших знаний необходимо наличие представителей всех направлений проявления творческих способностей исследователей, всех психологических типов ученых. Однако необходимо помнить, что основная масса будущих исследователей-математиков должна направлять свои усилия на изучение реальных явлений, поскольку, во-первых, эти исследования крайне необходимы обществу, во-вторых, именно они подсказывают, какие ветви математики заслуживают наиболее срочного развития, какие методы нуждаются в дальнейшем совершенствовании. Практика предоставляет исследователю неограниченный выбор проблем, их только нужно научиться замечать. Прикладные исследования для математика предоставляют огромные возможности проявления способностей самого разнообразного характера: составление моделей явлений, выбор и разработка методов исследования, разработка математической теории, проверка качества предложенной модели и развитой теории. При этом идет речь не столько о применении уже разработанных методов исследования к той или иной частной задаче, которое осуществляется почти автоматически, подобно тому как мы используем арифметические знания в повседневной практике. В подавляющем большинстве случаев для решения маломальски сложной практической задачи уже разработанных приемов бывает недостаточно, требуется что-то добавить, что-то изменить, что-то разработать заново, чтобы модель, теория и явление составляли единое целое. Значительной работы мысли требует не только разработка чистой теории, но и использование математических методов для практических целей.

Математик-прикладник обязан не только овладеть самим существом прикладной задачи и глубоко понять, так сказать, физику изучаемого явления, но и разработать его математическую модель, которая позволила бы правильно охватить самые существенные его особенности. Далее под эту модель он должен подобрать или разработать заново тот математический аппарат, который позволит созданной модели зажить в полную силу и обогатить познание существенными результатами. Для этого из созданной модели необходимо суметь извлечь логические следствия и дать им реальное истолкование. Но это еще далеко не все, поскольку полученные теоретические результаты нужно сравнить с фактическим положением дел, и если модель недостаточно хорошо соответствует явлению, то усовершенствовать ее или даже заменить на новую. Как правило, частная задача практики для талантливого математика становится лишь исходным пунктом, отталкиваясь от которого он получает возможность создать новую математическую теорию, которая способна разрешить не только данную задачу практики, но и множество других, которые, возможно, в данный момент даже еще и не поставлены.

В связи со сказанным полезно вспомнить слова А. М. Ляпунова, посвященные памяти своего замечательного учителя: «П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые возникают из рассмотрения частных случаев.

Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды.

Насколько подобное направление может быть плодотворным в чисто научном отношении, это наглядно показывает вся ученая деятельность П. Л. Чебышева, который пришел к постановке и решению совершенно новых и важных вопросов анализа, исходя из задач прикладного характера, иногда при том чисто практических.

Таков, впрочем, путь многих важных открытий в области математики»*).

Приведенные слова А. М. Ляпунова ни в какой степени не принижают роль абстрактных математических исследований. Они только утверждают, что полноценную жизнь в математике получают лишь те работы, которые либо тесно связаны с практикой,

*) Чебышев П. Л. «Избранные математические труды». ОГИЗ, Гостехиздат, 1946, с. 20.

либо направлены на широкое обобщение ранее известных результатов. Но эти обобщения должны восходить к принципам науки, а не сводиться к простому обобщательству без глубоких и далеко идущих целей, касающихся прогресса научных знаний.

В связи с беседой о роли практики в развитии математики полезно напомнить замечательные слова самого Чебышева, сказанные им более ста двадцати пяти лет назад: «Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях: она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и, таким образом, вызывает на изыскание новых методов. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом наука находит себе верного руководителя в практике»*).

В недавней популярной брошюре «Диалоги о математике» венгерского математика А. Реньи содержатся высказывания, созвучные тем, которые мы изложили. Я позволю себе привести здесь две цитаты из этой замечательной книги: «...для успешного применения ее [математики — *Б. Г.*] нужно глубокое понимание ее, и если кто-то хочет применять математику к новым объектам, он должен быть творческим математиком. И, наоборот, интерес к применениям может помочь в чисто математических исследованиях»**).

Рассказывая Герону о принципах устройства параболических зеркал, с помощью которого был сожжен римский флот, Архимед сослался на известное свойство параболы: поток лучей, параллельных оси параболы, после отражения от параболы пересекается в ее фокусе. И далее он продолжал: «Вероятно, когда ты услышал одно из ее [этой теоремы — *Б. Г.*] остроумных доказательств, ты понял его и, возможно, даже восхищался его красотой и изяществом, но и только. Некоторые математики пошли дальше — они исследовали простые следствия или нашли новые доказательства, но на этом остановились. Я просто продвинулся еще на один шаг: я увидел также ее нематематические следствия»***).

Вот это-то умение замечать за математическими формулами нематематические следствия крайне важно развивать у каждого математика. Оно не только необходимо математику-прикладнику, но крайне полезно и математику-теоретику, инженеру, экономисту, организатору производства. Его следует воспитывать со школьной скамьи, не прекращать этого воспитания в вузе, чтобы он сохранял полученное умение на практической работе. К

*) Чебышев П. Л. «Черчение географических карт». Полн. собр. соч. М., Изд.-во АН СССР, 1951, т. 5, с. 150.

**) Реньи А. «Диалоги о математике». М., «Мир», 1969, с. 53.

***) Там же, с. 49—50.

сожалению, на это искусство не обращают должного внимания ни в школе, ни в университетах. А ведь в наше время особенно важно овладеть искусством применения математических методов к изучению реальных явлений и тем самым получения таких выводов, которые имеют практическое значение и позволяют глубже проникнуть в природу самого явления. Наше время называют эпохой математизации знаний, и это накладывает на нас, педагогов, особые обязанности: мы не можем ограничиваться передачей нашим учащимся только формальных знаний, а должны приучить их видеть за формальными результатами «нематематические следствия», а за практическими задачами — огромные возможности прогресса теоретической математики.

Из предыдущего ясно, что принято разделять не только математиков на теоретиков и прикладников, но и саму математику на прикладную и теоретическую. Мы уже видели, что в действительности положение является более сложным, поскольку, как правило, прикладник-математик выступает в качестве теоретика и теоретик время от времени занимается прикладными проблемами. Точно так же и в математике нередко случается так, что какая-то область математики долгое время считается абстрактной и приложений не имеющей, но наступает день, когда выясняется, что и она получает значение для приложений, оказывается вовлеченной в прикладные дела. И, как мы сейчас увидим, это не исключение, а правило.

До конца XVII — начала XVIII столетия весь арсенал прикладной математики сводился к простейшим правилам арифметики и началам геометрии. Что в ту пору требовалось от делового человека, от практика? Умение считать, производить взаимные расчеты в коммерческих операциях, приближенно подсчитывать запасы для армии, вычислять длины, площади, объемы. Вопросы морской навигации требовали еще владения элементами сферической геометрии, которая достаточно широко использовалась и в астрономии. Мы перечислили практически все потребности в математике общественной практики тех времен. Обратим внимание на то, что и сама математика, в сущности, ограничивалась только этими областями знания. Теория чисел, получившая значительное развитие в Древней Греции, в руках Диофанта являлась той же арифметикой, но только изучавшей глубокие свойства целых положительных чисел. В ту пору математический анализ, аналитическая геометрия, теория вероятностей еще не вышли из состояния первичных разработок.

Резкое расширение арсенала средств прикладной математики принес XVIII век, когда трудами Ньютона и Лейбница, а также их предшественников — Кавальери, Кеплера, Ферма, Барлоу и других были заложены основы грандиозного математического здания — анализа, т. е. дифференциального и интегрального исчислений. Их появление стимулировалось постановкой важных задач, связанных с изучением движения и необходимостью вычисления площадей и объемов. В частности, требовалось дать точное определение скорости точки в данный момент времени. Математический анализ уже в начале XVIII века вошел в средства прикладной математики и очень быстро превратился в число основных ее орудий исследования. Необходимым условием развития математического анализа была аналитическая геометрия, созданная Рене Декартом и имевшая своими предшественниками строителей египетских пирамид, широко использовавших идею прямоугольных координат, как теперь принято говорить, декартовых координат. Весь XVIII век ушел на совершенствование математического анализа и на расширение поля применений этого нового средства математических исследований. В первую очередь бурно развилась механика, для которой дифференциальное и интегральное исчисления, а вместе с ними и дифференциальные уравнения явились долгожданным методом. Астрономия, изучавшая в значительной степени движения планет, получила в ту пору блестящие возможности для прогресса и превосходно ими воспользовалась. В течение XVIII и первой половины XIX столетия успехи в изучении математическими методами явлений гидродинамики (Д. Бернулли, Л. Эйлер), распространения тепла (Ж. Фурье, С. Пуассон, М. В. Остроградский и др.), упругости твердых тел (О. Коши, Л. Навье, Д. Стокс) привели к привлечению в число прикладных математических дисциплин теорию дифференциальных уравнений в частных производных. Следует заметить, что сама эта теория появилась и прогрессировала под постоянным воздействием задач механики и математической физики.

Наш век привел к резкому увеличению числа тех областей математики, которые получили прикладное значение. Прежде всего, оказалось, что представления о времени и пространстве, сложившиеся на протяжении тысячелетий, требуют пересмотра. Геометрии Лобачевского и Римана, бывшие до этого чисто теоретическими построениями, получили принципиальное значение для физики. В результате исследования «странных» геометрий получили не только абстрактно-теоретический, но и прикладной стимул. Для наглядного представления явлений, связанных с эволюцией молекул, потребовалось ввести в рассмотрение многомерные геометрии, а позднее и геометрии бесконечномерные и связанный с ними функциональный анализ. Теория операторов, получившая простое геометрическое истолкование, оказалась мощным аппаратом современной физики. Задачи электротехники, аэродинамики и теории упругости возвели теорию функций комплексного переменного в ранг прикладных математических дисциплин. Еще в начале прошлого века теория вероятностей нашла естественные применения в теории ошибок наблюдений, теории стрельбы, а позднее в кинетической теории газов и биологии. Сейчас теория вероятностей — одно из основных орудий математического исследования подавляющего числа задач биологии, теории связи, физики, организации производства, экономики, социальных процессов, инженерного дела. Отметим, наконец, что математическая логика, которая развивалась первоначально как средство обоснования математики, теперь получила многочисленные важные применения. Достаточно напомнить о широком использовании математической логики при программировании задач для постановки их на ЭВМ, при автоматизации технологических процессов, в информационных системах.

Сказанное подтверждает заключение, которое мы уже высказали в этой книге: в наше время трудно указать какую-либо ветвь математики, которая не находила бы или не могла бы найти применений в огромном разнообразии проблем практики. По-видимому, разделение математики на прикладную и теоретическую потеряло смысл. Вероятно, следует говорить о том, что математики разделяются на теоретиков и прикладников, разделяясь тем самым по своим интересам и творческой направленности.

Несомненно, что последние четыре десятилетия нашего века проходили под сильнейшим воздействием трех направлений научных и практических поисков: всестороннего исследования энергии атомного ядра, изучения космического пространства, создания и использования электронных вычислительных машин. Каждое из этих направлений научной мысли в широчайшей мере использовало математические методы, и многие важные эффекты были обнаружены путем вычислений, а не экспериментальных поисков. Но одновременно каждое из этих научных направлений оказало огромное воздействие на развитие современной математики, послужив началом новых ее разделов. Конечно, поскольку вычисления являются частью математики и во все времена были связаны с ее приложениями, создание ЭВМ оказало особенно большое воздействие на положение математики в современном мире. Оказалось, что человечество получило в руки не только исключительный по быстродействию и возможностям производства вычислительных операций инструмент, но и средство для выполнения логических операций и моделирования хода изучаемых процессов. В результате для многих областей деятельности, в которых раньше в лучшем случае использовались лишь четыре действия арифметики, появилась потребность в создании сложных логико-математических моделей. Использование ЭВМ для исследования процессов образования погоды, передачи информации, выбора решений инженерного и иного плана, операций управления процессом движения ракеты или же технологическим процессом требует предварительного логико-математического описания явлений, составления их математических моделей и последующего вывода из них логических следствий. Как мы уже сказали, появление ЭВМ оказало решающее влияние на желание использовать математические методы и в таких областях знания, которые традиционно считались нематематическими. Но и в тех областях науки и практической деятельности, в которых математические методы широко использовались уже давно, открылись новые пути их использования. Прежде всего наличие ЭВМ позволяет в фантастически короткие сроки осуществлять грандиозные по своему объему вычислительные работы, которые еще совсем недавно были просто недоступны прежним средствам вычислительной техники.

Вычислительная техника наших дней не только ускорила процесс вычислений, но и сделала некоторые расчеты принципиально возможными. Действительно, в геодезии, аэродинамике, ядерной энергетике и многих других областях знания нередко требуется произвести сотни миллионов и даже миллиарды вычислительных операций, прежде чем будет получен окончательный результат. Как правило, эти вычисления нельзя разбить на блоки, которые было бы возможно поручить различным вычислителям, поскольку все действия взаимосвязаны. Хороший вычислитель способен за день работы выполнить приблизительно тысячу арифметических операций, а значит, за год около двухсот пятидесяти тысяч. Если вся задача требует, скажем, пятисот миллионов операций, то это означает, что для ее решения требуется две тысячи лет. К этому следует добавить работы по проверке вычислений и, как обычно, дублирование расчетов. Никто таких сроков на производство вычислений отпустить не может, хотя бы потому, что актуальность проблемы за это время слегка обесценится.

Современные скорости действия ЭВМ достигают сотен тысяч и даже миллионов операций в секунду, машины обладают огромной оперативной памятью. Это дает возможность использовать их для решения весьма сложных и трудоемких задач. Но для того чтобы машины действовали, им нужны хорошо продуманные инструкции, что, в каком порядке и как делать. Для этой цели пришлось разработать ряд новых математических дисциплин — теорию программирования, языки программирования и пр. Таким образом, появление ЭВМ стимулировало развитие математики в совершенно новых направлениях. Пришлось пересмотреть и методы приближенных вычислений, поскольку оказалось, что нередко методы, удачные для ручного счета, неудачны для вычислительной техники. Естественно, что это обстоятельство привлекло внимание исследователей к различным новым аспектам приближенного анализа.

ЭВМ заняли в жизни науки особое положение, но, как бы велика ни была их роль, нельзя забывать о значении математики для плодотворной их работы. На ЭВМ мы должны смотреть не как на цель, а как на средство доводить исследование до конца, до возможности применения математической теории явления до практического использования. Ведь прежде чем ввести в действие ЭВМ, необходимо провести собственно математическое исследование явления, составить программу для ЭВМ и лишь после этого ввести ее в действие. Это превосходно знают специалисты в области физики, механики, инженерного дела и экономисты. Так, ЭВМ не могла бы управлять полетом самолета, если бы предварительно не были созданы математические модели соответствующих процессов и затем превращены в соответствующие программы для ЭВМ.

Широко распространена мысль о том, что математические теории теперь построены на аксиоматической основе и поэтому они остаются истинными, что бы ни произошло в мире. Они обладают вечной истинностью не как модели явлений реального мира, а как системы утверждений, основанных на принятых постулатах, как системы логических выводов, определяемых принятой аксиоматикой. Это действительно так. Но каждый математик должен знать о своей науке значительно больше, а именно: чем вызван тот или иной набор аксиом, какое отношение он имеет к явлениям реального мира и можно ли дать какую-либо практическую интерпретацию для вновь созданной теории. На мой взгляд, знание будет неполноценным, если «математик, занимающийся, скажем, теорией групп, не обязан знать и не всегда знает, какое физическое значение приписывают тем или иным группам в теории элементарных частиц»*). Может быть, тот или иной специалист и может не знать, как используется та или иная теория в какой-то специальной области знания. Но в преподавании мы не можем отрывать построение математической теории от источников ее происхождения и развития. Такой подход методологически совершенно неприемлем. Мы не можем забывать о том, что сами абстрактные теории развивались не на пустом месте, а имели своим источником задачи математики, физики, химии, инженерного дела. Они были исторически и практически обусловлены прошлым развитием науки и потребностей общества, а значит, они являются не просто системой утверждений, основанных на как-то выбранных постулатах. Вот почему так важен теперь исторический подход к развитию математики и появлению ее абстрактных теорий.

§ 6. О предмете математики

Дать краткое определение предмета математики совсем не просто, содержание определения изменяется с повышением уровня математического образования. Школьник первого или второго класса, только приступивший к изучению математики, скажет, что математика изучает правила счета предметов. И он будет прав, поскольку именно с этим учащийся знакомится на первых порах. Он будет прав и в историческом аспекте, поскольку на протяжении длительного периода истории арифметические операции

*) Тростников В. Н. «Загадка Эйнштейна». «Знание», серия «Математика и кибернетика», 1971, № 6.

составляли едва ли не единственный предмет ее занятий. Школьники постарше добавят к сказанному изучение геометрических объектов — линий, плоских фигур, тел, преобразований, а также элементы алгебры. Старшие же школьники включат в такое определение вдобавок действие перехода к пределу и изучение функций. Лица, закончившие высшие технические учебные заведения или же естественнонаучные факультеты университетов, уже не удовлетворятся определениями школьников, поскольку они знают, что в состав математики входят теория вероятностей, математическая статистика, дифференциальные уравнения, программирование для ЭВМ, а также их использование для целей производства вычислений, обработки опытных данных, передачи и обработки информации. Однако и этим не исчерпывается содержание математики. Теория множеств, математическая логика, оптимальное управление, теория случайных процессов и многое другое — все это входит в состав математики и не сводится ни к геометрии, ни к арифметике, ни к алгебре, ни к математическому анализу.

Нужно признаться, что такого рода ответы уводят в сторону от обсуждаемого вопроса, поскольку они попросту перечисляют те направления математической мысли, которые имеются в науке, но не подводят нас к необходимому определению. Действительно, если бы подобный вопрос обсуждался физиками, химиками или биологами, то они не стали бы перечислять различные ветви физики, химии или биологии, а стали бы говорить о тех явлениях природы, которые они изучают. Скажем, биологи заявили бы, что биология изучает различные проявления жизненных явлений. Конечно, при этом возникла бы необходимость определить, что такое жизнь и жизненные явления, но все же такое определение дало бы достаточно точное представление о деятельности биолога и о содержании самой науки биологии.

Об этом превосходно сказано в статье А. Я. Хинчина «Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей». Нет нужды пересказывать своими словами то, что хорошо сказано другим, а потому приведем соответствующую цитату:

«Основной критерий, отличающий естественнонаучную дисциплину от математической, мы видим в том характере определения свойственной данной науке области исследования, который является типичным для этих двух категорий научных дисциплин. Каждая естественнонаучная дисциплина определяется материальной спецификой своего предмета, реальными чертами той области действительного мира, которую она изучает. Именно так определяют свой предмет физика, биология, психология. Один и тот же предмет может быть изучаем самыми различными методами, в том числе и математическими; но, переходя от одного метода к другому, мы всегда остаемся в пределах данной дисциплины, ибо для нее реальный предмет, а не метод исследования составляет основную специфическую черту...

Напротив, определяющим признаком всякой математической дисциплины всегда является некоторый формальный метод, потенциально допускающий самые различные материальные воплощения, а следовательно, и практические применения. Может ли быть тот или иной предмет, то или другое явление материального мира исследуемо с помощью данного математического метода — этот вопрос решается не конкретной материальной природой предмета или явления, но исключительно их формальными структурными свойствами и прежде всего теми количественными соотношениями и пространственными формами, в которых они живут или протекают»*).

Здесь четко проведена грань между математикой и естественнонаучными дисциплинами. В связи с этим, однако, мне хотелось бы подчеркнуть мысль, которая должна быть отражена в нашей педагогической работе: хотя математику определяет метод исследования, а не материальный предмет, мы должны постоянно подчеркивать при изложении математики, что источником многих, если не сказать большинства, математических проблем и понятий являются задачи, связанные с изучением конкретных явлений. Человечество выделило математику в особую науку, потому что это целесообразно — раз и навсегда формулировать правила, которые затем будут применяться во множестве различных практических одежд, когда имеются одни и те же условия, необходимые для их применимости.

В недавней статье «Геология и космос» заместитель министра геологии СССР В. Волков писал: «Данные дешифрирования космических снимков в комплексе со сведениями о составе и возрасте горных пород, проявлениях полезных ископаемых, геохимических и геофизических аномалиях обрабатываются с помощью ЭВМ. Это позволяет наметить наиболее перспективные площади для детальных работ»**). Несомненно, что применение ЭВМ к геологическим исследованиям оставляет эти исследования геологическими. Принципы же работы ЭВМ и их математическое обеспечение разрабатывались без учета возможного геологического использования. Возможность использования ЭВМ для целей обработки космических снимков определяется тем, что структурные свойства этих данных находятся в соответствии с логикой определенных программ работы ЭВМ.

Математический результат обладает тем свойством, что он применим при изучении не только какого-то определенного явления или процесса, а может найти использование и во многих других, физическая природа которых принципиально отлична от ранее рассмотренных. Так, правила арифметики применимы и в задачах экономики, и при технических расчетах, и при решении вопросов сельского хозяйства, и в научных исследованиях.

---

*) «Вопросы философии», 1961, № 1, с. 91—102, № 2, с. 77—89.
**) «Известия» от 14 января 1983 г.

Арифметические правила выработаны тысячелетия назад, их изучение имеет сейчас лишь педагогическое значение, поскольку в научном отношении относительно них сказать совершенно нечего, но прикладную ценность они сохранили на вечные времена. Арифметика представляет собой составную часть математики, и хотя ее традиционная часть уже не подлежит творческому продолжению внутри математики, она находит и будет находить многочисленные применения практического характера. Эти применения могут иметь огромное значение для человечества, но вклада собственно в математику, в правила ее действий они не внесут. Интересную мысль на этот счет высказал В. Маяковский: «Математик — это человек, который создает, дополняет, развивает математические правила, который вносит новое в математическое знание. Человек, впервые формулировавший, что «два и два четыре» — великий математик, если даже эту истину он получил из складывания двух окурков с двумя окурками. Все дальнейшие люди, хотя бы они складывали неизмеримо большие вещи, например, паровоз с паровозом,— все эти люди — не математики»*).

Сказанное, безусловно, относится не только к арифметике, но и к любой области математики. Использование дифференцирования или же метода Рунге — Кутта для приближенного решения дифференциального уравнения само по себе не является математическим исследованием, даже если оно относится к проблемам покорения космоса. Это применение стандартного математического аппарата в стандартных условиях. Но прикладные задачи нередко приводят к таким ситуациям, когда появляются непривычные вопросы, требующие создания новых математических методов исследования, требуются новые подходы к решению нестандартных задач и нередко возникает необходимость в создании новых математических теорий. Последние десятилетия особенно богаты такими ситуациями. Вот в таких-то случаях математика и получает мощный стимул для прогресса, для открытий непреходящего значения. В XVIII веке таким стимулом явились астрономия и механика, в наше время этих стимулов несравненно больше.

Но все-таки, чем же занимается математика, каков предмет ее исследований? Ответу на этот вопрос посвящено огромное число работ. Мы сейчас остановимся на двух точках зрения, получивших очень широкое распространение. Одна из них была высказана Ф Энгельсом в известном произведении «Анти-Дюринг», другая Н. Бурбаки в статье «Архитектура математики», перепечатанной в книге «Очерки по истории математики».

Согласно Ф. Энгельсу «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира»**).

---

*) Маяковский В. «Как делать стихи?». «Советский писатель», 1952, с. 5.

**) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 37.

Н. Бурбаки утверждает, что «единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры»*).

Хотелось бы отметить, что обе концепции вполне согласуются друг с другом, но каждая из них заслуживает некоторого обсуждения. Прежде всего, определение Энгельса не только описывает объект исследования математики, но и указывает его происхождение — действительный мир. Н. Бурбаки указывает объект исследования, но ничего не говорит о том, откуда он (т. е. математические структуры) берет свою жизнь. Позднее это обстоятельство приводит к непреодолимым затруднениям, когда коллектив Бурбаки начинает выяснять отношение математики к явлениям действительного мира. Далее, определение Энгельса в значительной мере привязано к состоянию математики во второй половине XIX века и ничего не говорит о тех ее областях, которые прямо не связаны ни с количественными отношениями, ни с пространственными формами. К таким разделам математики относится, например, математическая логика, многие разделы программирования для ЭВМ. Таким образом, определение Энгельса требует некоторых уточнений. Определение Бурбаки не нуждается в этого рода уточнениях. Однако, как мы уже упомянули, оно обладает другим крупным недостатком, который нацело перевешивает достоинства определения. Кроме того, их определение является тавтологическим — математика занимается теми объектами (математическими структурами), которые она изучает. Ведь вот в чем состоит их определение.

Дело в том, что Бурбаки не желает выяснять отношение математических структур к действительному миру. Более того, он подчеркивает в ряде мест то обстоятельство, что эти структуры создаются независимо от реального мира. Вот почему в упомянутой статье было написано следующее: «...основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического. То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь,— это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл) и, быть может, мы их никогда не узнаем»**).

Подобный вопрос в определении Ф. Энгельса даже не может возникнуть, поскольку в нем уже содержится утверждение о том, что математические понятия являются абстракциями от некоторых отношений и форм реального мира. Они берутся из

*) Бурбаки Н. «Очерки по истории математики». М., Изд-во «Иностранной литературы», 1963, с. 251.

**) Там же, с. 258.

реального мира и поэтому естественным образом с ними связаны. В сущности, именно этим и объясняется поразительная применимость результатов математики к явлениям окружающего нас мира, а также объясняется успех того процесса, который сейчас широко наблюдается и получил название математизации знаний. Но вместе с тем следует отметить, что даже правила математики не обладают абсолютной применимостью — для них также имеется ограниченная область применения, где они господствуют безраздельно. Примеры, которые поясняли бы эту мысль, найти нетрудно. Так, не всегда верно утверждение: два и два равно четырем. Вот пример, иллюстрирующий это положение,— хорошо известно, что смесь двух литров спирта и двух литров воды не дает четыре литра смеси. Молекулярное строение материи приводит к тому, что молекулы располагаются компактнее и объем смеси окажется меньше суммы объемов составляющих. Правило сложения (арифметики) нарушается. Можно привести примеры и иного характера, например, что сумма зависит от порядка суммирования.

В связи со сделанными замечаниями полезно вспомнить одно высказывание В. И. Ленина, помещенное в «Философских тетрадях» и сделанное им в связи с конспектированием учения о понятии в «Науке логики» Гегеля. «Познание есть отражение человеком природы. Но это не простое, не непосредственное, не цельное отражение, а процесс ряда абстракций, формирования, образования понятий, законов etc., каковые понятия, законы etc. (мышление, наука = «логическая идея») и *охватывают* условно, приблизительно универсальную закономерность вечно движущейся и развивающейся природы»*). Математика не является исключением из всех областей знания — она тоже позволяет изучать явления лишь приближенно. Но следует иметь в виду, что логические ее выводы абсолютно строги и точны. Ее приближенность носит не внутренний характер, а лишь связанный с составлением математической модели явления. Этот вопрос мы достаточно подробно уже изучили в специальном параграфе.

Для диалектического материализма понятия математики — не произвольные понятия, а абстракции от реально существующих явлений, процессов и предметов или же абстракции от уже сложившихся абстракций, т. е. абстракции высших порядков. Именно это обстоятельство отличает точки зрения советских математиков от утверждений ряда крупных буржуазных ученых Запада. В «Диалектике природы» Ф. Энгельс писал: «... вся так называемая чистая математика занимается абстракциями ... все ее величины суть, строго говоря, воображаемые величины ...»**). Эти слова достаточно четко отражают мнение одного из осно-

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 163—164.
**) Маркс К., Энгельс Ф Соч., т. 20, с 586

воположников марксистской философии относительно роли абстракции в математике. Но к этому следует добавить, что эти «воображаемые величины» строятся не произвольно, а, так сказать, берутся из природы. То, что только что было сказано, принципиально отличается от следующего утверждения Альберта Эйнштейна: «...геометрия имеет дело с объектами, которые обозначаются словами *прямая, точка* и т. д. При этом не допускается какое-либо знание или представление этих предметов, так как аксиомы лишены какого бы то ни было видимого и реального смысла... Эти аксиомы — свободные творения человеческого духа»*).

Число таких высказываний можно продолжить практически безгранично. Но в этом нет нужды, поскольку основной смысл, который в них содержится, один и тот же — математика и ее понятия не связаны с явлениями мира, в котором мы живем. Наоборот, математик сам для себя создает новый мир идей и понятий, и, удивительное дело, этот свободно создаваемый мир находит неограниченные применения в науках о природе, о социальных явлениях, а также в инженерном деле. Схема этих концепций одна и та же: сначала утверждается, что математические понятия свободно творятся человеческим разумом, а затем удивляются, как математические теории могут применяться к изучению реальных явлений.

Остановимся несколько подробнее на утверждении о «свободном создании математических понятий человеческим разумом». Так ли это? Имеются ли в науке понятия, которые созданы без связи с прошлым прогрессом науки и общественной практикой? Мы прекрасно знаем, что научному математическому творчеству предшествует длительный срок изучения многих школьных предметов, обучение в вузе, чтение книг, статей, беседы с коллегами и многими другими специалистами (в том числе и в других областях знания). Математик живет в обществе, а не подобен Робинзону, проживавшему на необитаемом острове. И именно поэтому, хочет он того или нет, но узнает о проблемах, возникающих в науке, технике, общественной жизни. Иными словами, его мышление оказывается подготовленным к определенной тематике, постановке не любых проблем, а таких, которые необходимы для прогресса. К тому же, как мы уже говорили, мышление исследователя находилось под воздействием не только современной ему жизненной практики, но всей предшествовавшей эволюции науки. Человек не волен по собственному произволу, ничем не сдерживаемым желаниям и прихотям творить математические понятия и теории, которые были бы ценны для науки, для других исследователей, для человечества. А ведь математические понятия сохраняют свое значение и понимаются одинаково учеными разных стран. Более того, они сохраняют тот

*) Einstein A. „Geometrie und Erfahrung. Sitzungsberichte Prußische Academie der Wissenschaft, 1921, S. 124.

же самый смысл и значение для различных общественных формаций и исторических эпох. Вдобавок обратим внимание на то, что нередко к одному и тому же понятию, к одним и тем же направлениям исследований одновременно приходят математики разных стран, практически никак между собой не связанные. Это обстоятельство весьма серьезно, и оно служит дополнительным веским доводом против концепции свободного «сотворения» математических понятий и направлений исследований.

На базе сведений, полученных в результате наблюдений, мы строим наши понятия, отвлекаясь от непосредственных данных, приобретаемых нашими чувствами. Согласно Лобачевскому в основе математики должны лежать не произвольные понятия, а лишь те, которые приобретаются в результате наблюдений над явлениями природы: «... все математические начала, которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики, а часто даже не оправдываются ею. Одинаковость начальных понятий всех людей, их простота и малое число показывают, что они суть необходимое следствие существа вещей относительно к природе человека, а посему и будут всегда прочным основанием наук»*).

Мы закончим настоящий параграф большой выдержкой из книги Ф. Энгельса «Анти-Дюринг», поскольку содержащиеся в ней утверждения в точности соответствуют рассматриваемому нами вопросу и прекрасно проясняют многие принципиальные моменты. «Подобно основным формам бытия, г-н Дюринг считает также возможным вывести всю чистую математику непосредственно из головы, априорно, т. е. не прибегая к опыту, который мы получаем из внешнего мира.

В чистой математике,— утверждает г-н Дюринг,— разум имеет дело «с продуктами своего собственного свободного творчества и воображения»; понятия числа и фигуры представляют собой «достаточный для нее и создаваемый ею самой объект» и потому он имеет «значение, независимое от *особого* опыта и реального содержания мира».

Что чистая математика имеет значение, независимое от *особого* опыта каждой отдельной личности, это, конечно, верно... Но совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди научились считать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех

*) Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч., т. 1. М., Гостехиздат, 1964, с. 186.

прочих свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт исторического развития. Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было прийти к понятию фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть, весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает весьма абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины... Как и все другие науки, математика возникла из практических потребностей людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики. Но, как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему, как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться. Так было с обществом и государством, так, а не иначе, *чистая* математика *применяется* впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей,— как раз только поэтому может вообще применяться»*).

§ 7. Математизация знаний

Несомненно, что двадцатый век войдет в историю человечества не только в связи с величайшими социальными революциями, приводящими к коренному переустройству человеческого общества. Будущие историки не обойдут молчанием научно-техническую революцию, происходящую в наше время, и сопровождающую ее математизацию знаний. Математизация знаний состоит в том, что математические методы проникают во все области знания, в том числе и в такие, которые на протяжении веков оставались на уровне качественного изучения. Организация производства, медицина, экономика — все это только начало привлекать по существу для решения возникавших в них проблем математику и математический стиль мышления. Этому в значительной мере содействовало появление современных электронных вычислительных машин, которые не только способны складывать, вычитать, умножать и делить, но и производить логические действия.

---

*) Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 36—37.

Математизация знаний — длительный процесс, начавшийся многие тысячелетия назад и с большой интенсивностью продолжавшийся в историческую эпоху нового времени. Теперь эта интенсивность значительно увеличилась.

В одном из папирусов, относящихся к Новому царству ($\approx$1500 г. до наш. летоисчисления), содержится такая поучительная задача, которую сопровождает не менее поучительное добавление.

«Нужно соорудить наклонное [строение — *Б. Г.*] длиной 730 локтей, шириной 55 локтей, содержащее 120 отделений, заполненных балками и тростником; высотой 60 локтей в наивысшей точке, 30 локтей в середине, с уступом в дважды 15 локтей и с полом в 5 локтей. Сколько требуется для этого кирпичей, спрашивают у генералов, спрашивают у писцов всех вместе, но ни один из них не знает ничего. Все они надеются на тебя и говорят: «Ты умный писец, мой друг! Решай за нас быстро! Смотри, твое имя знаменито... Пусть не скажут, что есть вещи, которых даже ты не знаешь. Ответь нам, сколько нужно кирпичей для этого?».

Мы не будем останавливаться на формулировке задачи, где не хватает в условии указания на то, какой толщины следует сделать стену. Мы должны сейчас отметить то уважение, с каким обращаются к лицу, способному решить элементарную геометрическую задачу.

В течение тысячелетий кораблестроение опиралось лишь на вековые традиции и на опыт мастеров. В 1696 г. английский кораблестроитель Антони Дини при постройке корабля «Rupert» подсчитал массу и расположение грузов до постройки, вычислил водоизмещение и на этом основании предсказал осадку судна до спуска на воду. Более того, пользуясь произведенными расчетами, он приказал прорезать порты (отверстия в бортах для стрельбы из орудий) еще на стапеле. Осуществление работ после расчетов, а не после проверки состояния судна на воде вызвало в ту пору всеобщее удивление. Позднее такие расчеты вошли во всеобщее употребление, в повседневный обиход, поскольку они упрощали технологию постройки, ускоряли и удешевляли процесс строительства.

Появление дифференциального и интегрального исчислений, а вместе с ними и теории дифференциальных уравнений привело к резкому увеличению роли математики как при изучении процессов природы, так и в инженерном деле. Математический анализ стал языком науки XVIII и XIX веков, а вместе с тем и мощным орудием инженерных исследований. Во второй половине XIX века теория вероятностей, в связи с развитием молекулярных представлений о природе материи, превратилась в серьезное орудие физики, и эта роль увеличивалась с каждым десятилетием. Математическая статистика, зародившаяся в конце XVII века в связи с исследованием вопросов демографии, в конце XIX века начала превращаться в мощное орудие исследования биологических процессов и находить применения в медицине.

В наше время математизация знаний совершает своеобразный победный марш. Многие области науки и практической деятельности, до самого последнего времени находившиеся вдали от использования математических средств исследования, теперь усиленно стремятся наверстать упущенное. Причина этого, конечно, заключается не в быстропреходящей моде, а в том, что чисто качественное изучение явлений природы, экономики, врачебного дела, организации производства, управления зачастую оказывается недостаточным. Как можно заставить рационально работать систему связи, если не знать ни количественных закономерностей поступления требований от абонентов, ни длительности обслуживания этих требований, если не знать, какова ее пропускная способность? Как можно автоматизировать процесс выплавки стали или крекинга нефти, если не знать точных количественных закономерностей этих процессов? Как можно рассчитать поведение самолета в полете, если не знать количественных закономерностей, связанных с образованием подъемной силы, влияния вибрации на крепление крыла к фюзеляжу, влияние формы фюзеляжа и крыльев на сопротивление в полете? Число этих «как» и «если» можно неограниченно умножать в любых областях знания. Вот почему научный и технический прогресс неумолимо приводят к необходимости использования математики и, в свою очередь, заставляют математиков обращать внимание на решение новых вопросов практики, поиски методов, максимально приближенных к особенностям постановки проблем. А это неизбежно вызывает необходимость развития самих математических методов, т. е. развития теоретической математики. Достаточно сказать, что развитие авиации предъявило очень серьезные требования к математике и явилось причиной бурного прогресса теории функций комплексного переменного, качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости движения.

В результате мы можем сказать, что математизация знаний состоит не в том, чтобы использовать готовые математические средства исследования и результаты, а в том, чтобы проводить поиски того специфического математического аппарата, который позволяет наиболее точно и полно описывать интересующий нас круг явлений, а также выводить из этого описания новые следствия, чтобы их использовать для увеличения нашего знания и для практической деятельности. Так случилось в героические времена возникновения и первых шагов в развитии математического анализа, когда изучение движения сделало его создание необходимостью. В наши дни с такими же ситуациями человечество столкнулось в связи с покорением энергии атомного ядра и первыми шагами в завоевании космоса. В значительной мере эти и другие прикладные проблемы стимулировали создание электронной вычислительной техники. Появление же ЭВМ вызвало к жизни многочисленные новые математические дисциплины, связанные с их эксплуатацией, их использованием.

Если вспомнить совсем недавнее прошлое и те требования, которые как идеал предъявлялись к вычислительным системам при объявлении конкурсов на их изобретение, то становится ясным, какой прогресс достигнут за какие-то пятьдесят лет.

Под номером первым среди первоочередных тем по прикладной математике, выдвинутых в то время математическим институтом им. В. А. Стеклова, было названо конструирование машины для решения систем линейных алгебраических уравнений. Всего было предъявлено семь требований к конструкции, в том числе такие: машина должна решать системы по меньшей мере с 20 неизвестными, затрачивать на это не более 30 мин (за вычетом времени на установку коэффициентов) и не ломаться при попытке решения противоречивой системы*).

С тех пор прошло меньше полустолетия, а возможности вычислительных машин стали такими, что они способны решать системы не с десятками, а с сотнями уравнений с таким же числом неизвестных. При этом весь процесс решения происходит в автоматическом режиме. В ту пору о таких возможностях вычислительных машин невозможно было даже мечтать. Огромные возможности машин — вычислительные и логические — находят широкое применение для практических и познавательных целей. Машинам поручается управление технологическими процессами, выбор оптимальных решений, проектирование новых машин, моделирование разнообразных процессов. Нет сомнений, что в наше время каждый специалист должен научиться пользоваться ЭВМ так же свободно, как он использует арифметику. Особенно важно это теперь, когда изобретены миникомпьютеры, обладающие огромными вычислительными возможностями. И как сорок лет назад непременной принадлежностью инженера считали логарифмическую линейку для проведения быстрых прикидочных расчетов, так вскоре инженера нельзя будет себе представить без миникомпьютера в кармане.

Астрономы и физики ранее, чем представители других естественных наук и практических областей деятельности, пришли к убеждению о том, что математические методы им необходимы не только для вычислений, но и в качестве тончайшего инструмента, своеобразного скальпеля, для проникновения в существо изучаемых ими закономерностей. Об этом прекрасно сказал один из крупнейших современных американских физиков Ф. Дайсон: «Место математики в физической науке трудно определить раз и навсегда. Взаимоотношение математики с наукой столь же богато и разнообразно, как и сама наука. При всех изгибах и поворотах истории физики один фактор остается неизменным — решающее воздействие математического воображения. Каждое столетие

---

*) «Успехи математических наук», 1936, № 2, с. 266.

характерно своим особым отношением к науке и своим стилем в математике. Вместе с тем во времена крупнейших достижений более глубокое понимание физики достигалось комбинацией экспериментальных наблюдений и чисто математической интуиции. Математика для физика является не просто инструментом, при помощи которого он рассчитывает различные явления. Математика — это основной источник представлений и принципов, посредством которых создаются новые теории»*).

Эта концепция о месте математики в физическом познании разделяется подавляющим большинством крупнейших физиков. В подтверждение этого тезиса приведем еще две цитаты из произведений творцов крупнейших теорий физики первой половины нашего века В. Гейзенберг писал, что «первичным языком, который вырабатывают в процессе научного усвоения фактов, является в теоретической физике обычно язык математики, а именно — математическая схема, позволяющая физикам предсказывать результаты будущих экспериментов»**). Об этом же хорошо сказал Луи де Бройль: «Когда физическая теория добивается получения связного математического представления, она стремится к тому, чтобы предсказать новые явления»***)

Но не только физика, а буквально все области знания требуют наличия «источника» представлений о характере протекания процессов природы, старения технических систем, протекания заболеваний. Когда мы изучаем природу памяти и хотим разобраться в особенностях ее работы, то одних экспериментов для этого недостаточно, необходимо выдвижение гипотез, которые объясняли бы наблюденные факты и позволяли предсказывать еще не наблюдавшиеся. Модель работы памяти должна быть при этом такой, чтобы можно было проверять ее качество точными количественными методами, а не ссылками на внутреннюю убежденность. Вопросы мышления как физиологического и психического процесса стали одной из центральных областей исследования современной биологии, они требуют не только длительных наблюдений, но и построения количественных теорий, позволяющих прогнозировать течение явлений и указывать в проверяемых терминах границы изменений того или иного количественного измеряемого феномена при определенном изменении внешних условий. Явление утомляемости нуждается в более глубоких объяснениях, чем те, которые я однажды слышал во время доклада одного крупного биохимика: «человек утомляется потому, что к нему приходит утомление». Нет нужды говорить, что это тавтология, которая ничего не объясняет. Нужно выяснить, почему утомление приходит к человеку быстрее, когда он выполняет работу с неудовлетворением, и значительно медленнее, когда

---

*) Дайсон Ф. «Успехи физических наук», т. 85, № 2, 1965, с. 351—364.
**) Гейзенберг В. «Физика и философия». М., 1963, с. 140.
***) Де Бройль Л. «По тропам науки». М., 1965, с. 163.

он увлечен выполняемым делом. Нужно также выяснить и такой важный для педагогического процесса вопрос: «Как вызвать увлечение»? Возможно, что эти области знания еще недостаточно созрели для процесса математизации. Об этом следует подумать, так же как и о том, что́ следует осуществить, чтобы мы могли разработать модели психических процессов. Для педагогики это крайне важно.

Интереснейшие слова о значении математики были предпосланы первой статье Н. Абеля одним из редакторов норвежского «Естественнонаучного журнала» профессором Ханстиным еще в середине первой половины прошлого века. Он писал: «Математика — это учение о природе в самом чистом его виде. Математика для ученого — то же самое, что скальпель для анатома: необходимейший инструмент, без которого невозможно проникновение в суть вещей... Те, кто попытаются идти вперед без этого орудия, вынуждены будут остаться на пороге»*). Сейчас на пороге оставаться не хочет ни одна область знания. Но дело даже не в желании или нежелании, а в необходимости, вызываемой самим процессом познания. Об этом было сказано почти 75 лет назад в гениальном философском произведении «Материализм и эмпириокритицизм» как о крупном достижении естествознания и всей науки при приближении «к таким однородным и простым элементам материи, законы движения которых допускают математическую обработку»**). Теперь мы приблизились к изучению элементов материи не только в физике, но и в биологии, и в ряде других наук.

Остановимся здесь на том, как математизация знаний влияет на изменение самого стиля научного мышления и на традиционные способы умозаключений. Рассмотрение этого вопроса представляет несомненный интерес и потому, что оно позволяет глубже проникнуть в процесс математизации знаний и понять причины неизбежности этого явления.

Познание имеет несколько ступеней своего развития. Сначала человек наблюдает явления и подмечает некоторые присущие им особенности. Затем, с целью уточнения полученных сведений, он приступает к проведению специальных экспериментов, т. е. наблюдений за интересующими нас явлениями в строго определенных условиях. Одновременно происходят попытки объяснения замеченных фактов на базе имеющихся общих представлений. Создается теория явления. Из этой теории выводятся следствия. По совпадению этих следствий с ходом явления судят о соответствии теории с истинным положением дела. Если теория позволяет получить сведения о фактах, которые ранее не наблюдались, и если затем их удается обнаружить в действительности, то

---

*) Цитировано по кн. О. Оре «Замечательный математик Нильс Хенрик Абель». М., 1961, с. 80.

**) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 326.

теория получает веское подкрепление. Но теория может носить чисто качественный характер, в ней может не быть предусмотренной сама возможность делать количественные выводы. До последнего времени именно к этого типа теориям постоянно обращалась медицина, да и сама она носила именно этот характер. В значительной мере экономика обладала качественным типом своих выводов. Несравненно большими возможностями обладают теории, способные учитывать и количественную сторону развития явлений. Такие теории позволяют не только делать выводы типа «если увеличить температуру проводов на 10 °С, то увеличится износ изоляции», но и установить, на сколько процентов увеличится износ изоляции — на 25, на 50, на 100%. Количественные теории являют собой признак зрелости теории, большего продвижения науки на пути познания особенностей изучаемых ею явлений. Недаром К. Маркс любил повторять утверждение: «Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается овладеть математическими методами».

Человечество очень давно подметило действие рычага и пользовалось им с незапамятных времен. Однако лишь количественная теория рычага, с которой знакомятся младшие школьники, позволяет делать предварительные расчеты и предвычислять те силы, которые следует приложить, чтобы получить необходимый эффект. Но этот шаг развития теории рычага появился на весьма высокой стадии прогресса научной мысли.

Мы до сих пор обращали внимание только на одну сторону дела, а именно на привлечение математики и ее методов к решению задач естествознания и практики. Этот процесс неизбежен, поскольку одни качественные знания не позволяют давать глубокую оценку явлений, прогнозировать их развитие. Для решения этой более сложной задачи необходимо привлекать математические методы с их символикой, системой изложения, с четкой формулировкой исходных предпосылок, полнотой классификации и строгостью логических заключений.

В математике всегда намечается совокупность исходных положений, в которых решается задача. Поэтому полученный результат, вообще говоря, верен только тогда, когда эти исходные положения выполнены. Например, известная каждому из нас с детства теорема Пифагора верна далеко не для каждой поверхности, отличной от плоскости. Такая скрупулезная точность в перечислении условий теорем, берущая свое начало в математике с эпохи эллинизма, долгое время была присуща только математике. В других научных дисциплинах, а также в практической деятельности к этой отточенной строгости относились долгое время скептически и не видели даже смысла в этом.

Теперь эта простая мысль — рассматривать хорошо определенные понятия и относительно них делать заключения с полной логической строгостью — широко входит в обиход как науки, так и практической деятельности. Строгий логический анализ ряда основных положений грамматики показал, что они не обладают законченной определенностью. Положение спасает привычка повседневного словоупотребления и формирования фраз, поэтому несовершенство грамматики не играет серьезной роли. Однако любая попытка передать автомату конструирование предложений по определенным правилам или же перевод с одного языка на другой приводит к многочисленным возможностям неправильных оборотов. А такого рода общения человека с машинами в наши дни очень часты, и у нас должна быть уверенность в том, что машины правильно воспримут наши указания и сделают именно то, что им задано. Именно поэтому при общении с машинами так часто используются математические средства передачи необходимой информации — график, формула, таблица, программа. В течение ряда лет я был довольно тесно связан с врачами, занимаясь вместе с ними проблемами объективизации диагностики заболеваний сердца. Меня поразило наличие почти что математического стиля мышления у ведущих врачей, занимающихся заболеваниями сердца. Анализ каждого больного проводился с поразительной логической скрупулезностью, свойственной до последнего времени лишь математическим исследованиям.

Вторая сторона математизации состоит в стремлении вывести из строго сформулированных начальных положений логические следствия и затем подвергать их непосредственному наблюдению. При этом особую ценность приобретают те теоретические построения, которые привлекают аналитический аппарат математики. Это обстоятельство позволяет воспользоваться огромным объемом уже имеющихся в математике выводов, методов, расчетов. Этим широко пользуется физика. Почти два столетия назад возникла математическая физика, которая на базе основных положений, полученных из наблюдений и специально поставленных опытов, получает дальнейшие следствия математическим путем. Так развивались корпускулярная и волновая оптика, так шло развитие акустики и электродинамики, теории атомного ядра и электронной оптики. Математическая теория приводила к выводам, согласно которым должны существовать ранее не наблюдавшиеся эффекты, ранее не наблюдавшиеся элементы материи. Эти выводы сравнивались с результатами наблюдений, и из них удавалось вывести массу следствий: подсчитать массу и заряд неизвестной частицы, ее взаимоотношения с уже известными частицами и пр. Иногда проходили годы, прежде чем удавалось экспериментально подтвердить выводы математической теории. Современная физика полна таких математических предвычислений реальных явлений, которые позднее были обнаружены путем сложных экспериментов, специально продуманных на базе математической теории.

Интересно заметить, что развитие физики (да и только ли физики) приводит к необходимости расширения математического аппарата для удовлетворения ее нужд. И нередко те методы, которые мы сегодня отбрасываем как бесперспективные, завтра находят большие и неожиданные применения. Об одном из таких примеров рассказал Ф. Дайсон в уже цитировавшейся статье. «В 1910 г. математик Веблен и физик Джеймс Джинс пересматривали программу по математике Принстонского университета. Джинс сказал: «Вполне возможно выбросить теорию групп; этот предмет никогда не найдет применения в физике»... По иронии судьбы теория групп стала позднее одним из центральных звеньев теоретической физики и в настоящее время царит в мыслях тех, кто занимается исследованием фундаментальных частиц»*).

Мы говорили о том, что качество любой теории проверяется практикой и постановкой соответствующим образом организованных экспериментов. Теперь математика вмешалась и в вопросы организации самого эксперимента. Как организовать наблюдения, чтобы при заданном их числе извлечь максимум информации? Эта проблема исключительно важна, поскольку на испытания в промышленности, лабораториях заводов и научных учреждений сейчас затрачиваются огромные материальные средства и человеческие усилия. В результате в настоящее время созданы основы математической теории оптимального эксперимента, которая позволяет уменьшить число необходимых опытов, а тем самым их стоимость, длительность производства и усилия операторов для получения обоснованных выводов. Порой этот выигрыш очень велик. Основная идея, которая при этом используется, состоит в том, чтобы учитывать результат каждого предшествующего испытания и проводить каждое последующее так, чтобы оно помогало уточнять уже полученные сведения.

Этот параграф уместно завершить известными словами Галилео Галилея, которые полно характеризуют значение математики, ее место в познании природы:

«Философия написана в грандиозной книге, которая открыта всегда для всех и каждого, я говорю о природе, но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее — математические формулы»*).

Я считаю, что эти слова достойны того, чтобы о них услышали наши школьники.

---

*) «Успехи физических наук», т. 85, вып. 2, 1965, с. 351.
*) Saggiatore, Opere, 6, Firenze, 1890—1900, p. 233.

5 Заказ 985

Глава 3. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

§ 1. Зачем нужна теория надежности?

Теория надежности относится к совсем новым направлениям научной мысли, зародившимся лишь в середине нашего столетия в связи с бурным развитием техники и резким увеличением значения технических систем в жизни общества. Там, где еще недавно господствовал ручной труд, теперь работают совершенные машины, позволяющие быстрее и точнее производить необходимые технологические операции. Во многих областях промышленности появляются роботы, на «плечи» которых ложится осуществление монотонных операций, требующих исключительной точности выполнения, или же операций, проводящихся в атмосфере, опасной для здоровья людей. Человечество создало разнообразные технические системы, позволяющие в невиданных ранее размерах ускорять технологические процессы и автоматизировать управление качеством промышленной продукции, использовать на работе и в быту новые виды энергии и передавать ее за сотни километров от места производства. Все это значительно облегчает жизнь и условия труда, но при одном условии: все технические средства должны работать безупречно и не выходить из установленного для них рабочего состояния. Любая неполадка в работе наших механических и электронных помощников вызывает не только неудобства, но часто и трудно поправимые последствия. От бесперебойного функционирования технических систем теперь зависит как сохранение огромных материальных ценностей, так и здоровье, а то и жизнь людей.

Действительно, отказ прибора «искусственное сердце» или «искусственные почки» грозит гибелью пациенту, выход из строя двигателей самолета, разгерметизирование кабины или ослабление крепления крыла к фюзеляжу грозит гибелью десяткам и даже сотням пассажиров. От управляющих устройств в решающей мере зависит ход технологических процессов в промышленности. Нарушение их в ряде ее областей может привести к тяжелым последствиям, например к выбросу в окружающую среду агрессивных компонент или разного рода авариям. Так, в 1977 г. Нью-Йорк испытал тяжелейшую катастрофу, связанную с выходом из строя системы электроснабжения. Жизнь огромного города была полностью дезорганизована: перестало работать метро, остановились лифты в домах, прекратили свою работу кафе и столовые, население лишилось освещения и подачи воды в квартиры, в больницах были вынуждены прервать срочные операции и многие лечебные процедуры, на улицах резко увеличилось число бандитских нападений ...И все это началось с выхода из строя реле в системе управления одной из станций, снабжающей огромный город электроэнергией.

Теория надежности — одна из самых молодых научных дисциплин нашего времени, хотя многие из основных ее вопросов и идей появились уже давно, находя на практике вполне удовлетворительное решение. То новое, что принесло наше время, сводится в большой мере к выделению понятия надежности изделий и тех характеристик, которые позволяют объективно описывать качество изделия, его приспособленность к длительной безотказной работе, а также количественное сравнение достигнутой надежности с той, которая необходима для нормальной эксплуатации.

Конечно, вопросы надежности технических систем в первую очередь представляют собой инженерную и экономическую значимость и имеют основной интерес для инженеров, экономистов, организаторов производства. Однако это вовсе не означает, что математические и физико-химические методы для теории надежности не представляют центрального интереса. Эти методы с первых дней существования теории надежности как особой науки вошли в нее фундаментальными составляющими. Оказалось, что без широкого привлечения математических идей и понятий теория надежности превратилась бы в чисто качественную науку и не смогла бы предоставить возможности производить точные расчеты, разыскивать оптимальные решения, вводить числовые характеристики для оценки состояния технических систем, сравнивать надежности различных предлагаемых решений.

В природе не существует абсолютно однородных и не изменяющих своих свойств со временем материалов, поэтому не может быть и абсолютно надежных изделий. Эти изменения свойств носят случайный характер и зачастую незаметны для наблюдателя. Хорошо известно, что если испытывать большое число изделий, изготовленных из одной партии полуфабрикатов, в одних и тех же условиях, то длительность их работы без отказа будет изменяться в весьма солидных пределах. Для уменьшения этого разброса требуются специальные меры, но всегда в заданных условиях изготовления и испытаний наблюдается статистическая устойчивость результатов, т. е. при повторении испытаний приблизительно сохраняется следующая закономерность: относительное число изделий, проработавших более срока t, остается постоянным. Эта величина может существенно изменяться лишь в результате изменения: а) условий, в которых проводятся испытания, б) технологии изготовления (включая и используемые материалы), в) конструкции изделия.

Только что отмеченное наблюдение является причиной того, что в теории и практике надежности широко используются методы и закономерности теории вероятностей и математической статистики. Но иногда можно услышать утверждение, что такая роль статистических методов неправомерна, поскольку для практики нужна абсолютная надежность техники, а не с той или иной вероятностью выполнения задания. Однако всем хорошо известно, что отказывают даже те изделия, о которых говорят, что они абсолютно надежны. Повысить надежность изделия заклинаниями типа — «наша продукция абсолютно надежна» — невозможно, даже если их произносить по нескольку раз в день. Мы уже говорили о том, что современные технические системы выполняют весьма ответственные задачи и поэтому хотелось бы иметь их абсолютно надежными. Но желание и действительность далеко не всегда совпадают. Нередко случается, что, приняв желаемое за действительное, мы совершаем грубую ошибку, приводящую к тяжелым последствиям. В частности, приняв положение об абсолютной надежности изготовляемого изделия, мы: а) разоружаем мысль конструктора, который перестает искать лучшие решения для повышения надежности изделия, б) вводим в заблуждение потребителей и перекладываем на их плечи все тяготы, связанные с эксплуатацией недостаточно надежных изделий и в) предоставляем изготовителям сваливать всю вину за отказы продукции на эксплуатационников, транспортников, на условия хранения и пр.

У конструкторов, изготовителей, эксплуатационников имеются многочисленные средства повышения надежности изделий, но нет средства сделать их абсолютно надежными. Вот почему так важно научиться оценивать надежность изделий и затем разрабатывать методы ее повышения. Для оценки надежности изделий приходится проводить специально организованные испытания, а также наблюдения за изделиями, находящимися в эксплуатации. Разработка теории испытаний на надежность и сбор данных об эксплуатации требуют не только практического опыта, но и глубоких математических разработок.

Интересно заметить, что сейчас день ото дня все полнее и глубже прослеживается значение идей и результатов теории надежности за пределами инженерного дела, а именно в психологии, биологии, демографии. Выясняется, что естественные для инженерного дела задачи имеют важное значение и для понимания процессов, происходящих в живых организмах и их сообществах. Впрочем нужно отметить и обратное: теория надежности в период своего зарождения многие понятия заимствовала из демографии.

До сих пор мы говорили о задачах теории надежности, не давая ни определений основных ее понятий, ни формулировки ее задач. (Речь шла об ее важности для современного общества.) Теперь мы перейдем к этим вопросам.

Любое изделие техники должно иметь какое-то функциональное назначение: самолеты — для перевозки пассажиров, токарные станки — для обработки заготовок, мельницы — для размола зерна или породы. При этом к ним предъявляются вполне естественные требования:

а) они, как правило, не должны выходить из рабочего состояния в заданный период функционирования (самолет должен быть исправен в течение времени выполнения рейса и т. п.);

б) при условии правильной эксплуатации, своевременного выполнения необходимых настроек, профилактических ремонтов, замен отдельных частей — они должны быть способны длительное время выполнять возложенные на них функции;

в) выполнение необходимых работ по подналадке и ремонту не должно вызывать затруднений.

На первый взгляд может показаться, что в действительности от технических систем можно и нужно требовать выполнения многих других качеств, чтобы их можно было считать надежными. Например, для прецизионных станков естественно требовать, чтобы они в течение длительного времени не теряли точности обработки или чтобы после длительного хранения они сохраняли свои рабочие характеристики. Однако оказывается, что оба эти требования излишни, поскольку они полностью укладываются в требование пункта «а)». Более того, до сих пор не встречалось случаев, чтобы приходилось требовать что-либо от технических устройств, что не укладывалось бы в пункты «а)», «б)», «в)».

Требование, сформулированное в пункте «а)», получило название *безотказности*. Оно абсолютно необходимо каждому изделию, поскольку, если изделие часто теряет свою работоспособность, на него нельзя положиться. Так, если самолет не может без отказов в оборудовании пролететь от пункта A до пункта B, то его надежность неудовлетворительна и от этой конструкции следует отказаться. Если аппарат «искусственное сердце» не в состоянии поддерживать заданный режим в процессе операции на сердце, то его использование может принести непоправимый ущерб пациенту. Свойство безотказности абсолютно необходимо как изделиям разового использования, так и изделиям, которые выполняют многократно сходные операции.

Свойство, описанное в требовании «б)», носит название *долговечности*. Оно необходимо подавляющему большинству изделий техники, поскольку нет возможности постоянно заменять изделия на новые. Любые изделия обязаны оправдать себя экономически, а для этого нужно, чтобы они достаточно долго работали. Автомобиль, чтобы его приобретение было оправдано экономически, должен проработать несколько лет. Самолет за время своей эксплуатации должен сделать очень много рейсов и пролететь сотни тысяч (а то и миллионов) километров, чтобы он не только оправдал затраты на него, но и принес некоторую прибыль. Аппарат «искусственные почки» должен оправдать себя длительной работой, поскольку у клиники нет материальных возможностей для каждого больного приобретать новый.

Долговечность изделия складывается из периодов его работоспособности: первоначального (после изготовления) и последующих, наступающих после замен, ремонтов, профилактических работ, подналадок. Так, если считается, что трактор от момента приобретения до момента списания должен проработать 12 лет, то это означает, что за этот срок будут осуществлены мелкие, средние и капитальные ремонты, остановки на подналадку и профилактические работы. Понятно, что все это не дается даром, приходится затрачивать рабочее время, материалы и финансовые ресурсы. Зачастую на ремонты и другие работы по поддержанию технического изделия в работоспособном состоянии приходится затрачивать суммы, в несколько раз превышающие его первоначальную стоимость. Для трактора этот коэффициент равен примерно 3—4. Однако при этом обеспечивается его длительная работоспособность, достигающая 12—15 лет. За этот срок он успевает сторицей окупить расходы, связанные с его приобретением и эксплуатацией.

Следует заметить, что расходы на ремонт и вообще на весь процесс эксплуатации сильно зависят от конструктивных решений, от качества изготовления и от квалификации обслуживающего персонала. Это, казалось бы, тривиальное замечание далеко не всегда принимается во внимание, и нередко конструкторы передают в массовое производство неотработанные модели, эксплуатация которых тяжким бременем ложится на эксплуатационников. Точно так же изготовители нередко нарушают технологию и дают потребителю неудовлетворительно изготовленную продукцию. Потребителю приходится затратить огромные дополнительные усилия, чтобы техника начала работать. Наконец, бывает, что техника хороша и по своим конструктивным особенностям и по изготовлению, но отношение к ней в период эксплуатации безобразное — распоряжается ею неквалифицированный или безалаберный оператор, хранится она под дождем и снегом, своевременно не смазывается и не проходит профилактического обслуживания. Все это приводит к преждевременному износу и повышенным расходам на поддержание работоспособности.

Третье требование («в)»), которое предъявляют к надежным изделиям, носит название *ремонтоприспособленности* (или *ремонтопригодности*). Речь идет о том, что наладка и ремонт должны быть выполнены в возможно более короткие сроки и для этого нужно иметь простой подход к каждому узлу, к каждой детали. Представим себе, что для подсоединения проводки системы зажигания двигателя автосамосвала необходимо разобрать карбюратор или, положив на капот доску, лечь на нее и тянуться рукой к клемме (этот случай взят из практики). Понятно, что такое положение нельзя считать допустимым и за такую конструкцию следует наложить взыскание на разработчиков. Но если подобная конструкция не может быть терпима в обычных условиях эксплуатации, то что же говорить о работе на таком самосвале в условиях Крайнего Севера или в боевой обстановке?! Тем не менее подобные случаи встречаются на практике и столь недоработанные конструкции идут в производство. Удачная конструкция обязательно должна учитывать условия эксплуатации и обеспечивать свободный подход к любой детали и возможности текущего, мелкого ремонта на месте силами самого эксплуатационника без необходимости отправки изделия в специальные мастерские. К сожалению, нередко конструкторы на эту сторону дела обращают недостаточное внимание.

Для оценки надежности технических систем и сравнения достигнутой надежности в разных конструкциях необходимо выработать количественные показатели, которые позволяли бы выяснять величину безотказности, долговечности и ремонтоприспособленности данной группы изделий или данной конструкции.

Безотказность принято оценивать вероятностью того, что изделие проработает заданный промежуток времени t без сбоев и без необходимости производства ремонта, замены узлов или элементов. Это центральная числовая характеристика надежности изделия, поскольку безотказность необходима для любых систем — одноразового действия (фотопластинка, взрыватель) и длительной эксплуатации. Хотя пусковое устройство двигателя космической ракеты должно проработать лишь очень короткий срок, без его безупречного функционирования ракета не сможет быть запущена. Если изделие многократного использования (самолет, комбайн) обладает малой безотказностью и с большой вероятностью, следовательно, отказывает через короткие промежутки времени, то такое изделие следует считать мало надежным. Для примера, если в среднем хлопкоуборочный комбайн требует ремонта или очистки устройств пневматики для всасывания коробочек через полчаса, то сбор хлопка для водителя комбайна превратится в мучение.

Долговечность естественно оценивать суммарной наработкой устройства от момента изготовления до момента списания, когда дальнейшее восстановление работоспособности становится бессмысленным из-за высокой стоимости ремонта или же из-за слишком коротких межремонтных промежутков. К сожалению, принятая система сбора данных о производительности механизмов такова, что не дает возможности рационально подойти к их оптимальной долговечности. Предположим, что нас интересуют небольшие моторы мощностью в 2—3 л. с. Таких двигателей в народном хозяйстве сотни тысяч, если не миллионы. Они недороги, но за принятый срок эксплуатации в 6—7 лет они должны несколько раз капитально ремонтироваться. Нам не удалось получить достоверных данных о распределении во времени моментов этих ремонтов, а также о стоимости этих ремонтов в зависимости от длительности эксплуатации. Ведь если начальный период в два-три года свободен от отказов и отказы, как правило, начинаются лишь после такой наработки, то возникает вопрос о целесообразности прекращения эксплуатации механизма через три года и замены его на новый. Подобные вопросы инженерного и экономического порядка заслуживают пристального внимания.

Ремонтоприспособленность изделий естественно измерять либо временем, которое следует затратить на исправление изделия, либо же стоимостью его ремонта. Для боевой машины возможность ремонта за кратчайший срок является гарантией выживаемости и естественно, что плохая ремонтоприспособленность является существенным компонентом ненадежности изделия.

Измерение показателей надежности представляет собой куда более сложную задачу, чем измерение привычных нам физических величин — температуры, силы тока, напряжения магнитного поля. Это вызвано тем, что надежность связана с процессами, которые еще не происходят, а только будут происходить на протяжении, как правило, длительного срока. В этом отношении теория надежности напоминает собой страховое дело, в котором нужно предсказывать длительность жизни застрахованного объекта, т. е. производить оценку не прошедшего и настоящего, а будущего.

Изложим теперь основы общей модели изменения надежности любого технического изделия. Эта модель была подробно изложена в книге трех авторов*), удостоенной Государственной премии СССР. Пока мне неизвестно другой модели, которая была бы способна охватить все ситуации, с которыми приходится сталкиваться в теоретических и прикладных вопросах, связанных с обеспечением надежности технических изделий и расчетом их надежности.

Мы исходим из того, что качество изделия, в том числе его надежность, характеризуются некоторым набором его параметров $x=(x_1, x_2, \ldots)$, который может быть конечным или бесконечным. Для модели это безразлично. Существенно лишь то, что эти параметры определяют состояние системы. В связи с этим мы станем отождествлять состояние системы с точкой x, т. е. со значениями всех ее параметров. Обозначим через X пространство возможных состояний системы. Согласно определению оно состоит из всех возможных точек x, в которых может находиться система. Пространство X может быть очень простым, например состоять только из двух точек x_1 и x_2 — изделие работоспособно и изделие неработоспособно. Однако, как правило, приходится иметь дело с гораздо более сложными ситуациями.

*) Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. «Математические методы в теории надежности», М., «Наука», 1965.

В каждый момент времени t система находится в некотором состоянии $x(t)$, которое, конечно, принадлежит X и зависит от времени t. В зависимости от условий, в которых находится система, состояние $x(t)$ может оставаться сравнительно длительный период времени практически неизменным или же может довольно быстро изменяться. Например, можно считать, что колесо автомобиля, находящееся в багажнике, практически не изменяет своих свойств, поскольку оно не несет на себе нагрузки (фактически его свойства все же меняются — резина со временем сохнет и изменяет свою структуру). Если же автомобиль движется с большой скоростью, то износ покрышки колеса происходит достаточно быстро. Таким образом, состояние системы изменяется со временем в пространстве X и описывает траекторию $x(t)$. Эта траектория дает картину изменения свойств технической системы.

В силу тех или иных соображений в пространстве X выделяется множество A, попадание в которое считается недопустимым. Каждый раз, как только система окажется в одном из состояний множества A, считается, что она попала в отказовое состояние. Самостоятельно выбраться из множества A система уже не может и необходимо производить ремонт. Понятно, что выбор множества A в высшей степени условен и определяется полностью теми целями, для которых предназначена система. Поэтому может случиться, что в разных случаях для одной и той же технической системы приходится выбирать различные множества A в качестве отказовых. Выбор A в значительной мере зависит от тех функций, которые поручаются системе, и от того ущерба, который приносит ее отказ. В качестве иллюстрации рассмотрим полупроводниковые элементы — диоды, резисторы, сопротивления, которые используются во многих электронных приборах — приемниках, аппаратах «искусственное сердце» и т. д. Если в приемнике массового пользования, с которым молодые люди бродят по улицам, на пляже, происходит резкое ухудшение работы элемента, то это считается допустимым, хотя звук от этого становится хриплым или слабым. Если же в аппарате «искусственное сердце» параметры элемента выходят за границы допустимого уровня на какие-нибудь 1—2%, то такой элемент считается негодным и его заменяют на новый, поскольку изменение работы всего аппарата представляет реальную угрозу для жизни пациента. И если в первом случае в качестве множества A можно выбрать совсем незначительную область, то во втором случае эта область A будет весьма широкой.

К сожалению, множество X и траектория $x(t)$ для большинства технических изделий изучены очень слабо, а потому затруднен и выбор множества A. Часто поэтому приходится идти по другому пути, который неудачен по ряду причин, в том числе и потому, что он приводит к значительному перерасходу средств. Именно, заранее назначается предельный срок использования изделия. Так, самолеты «Боинг-720» после 2000 часов эксплуатации должны отправляться на капитальный ремонт независимо от их состояния. Особенно строго при этом следят за двигателями. При этом многие из двигателей, снятые с самолета из-за «выработки ресурса», еще долгое время работают в различных хозяйственных организациях при высоких нагрузках.

Изучение функции $x(t)$ для задач теории надежности и ее применений представляет принципиальное значение, поскольку она полностью описывает судьбу изделия и позволяет определять все характеристики его надежности. Строго говоря, эта функция зависит не только от времени, но и от режима работы, поэтому для каждого момента следовало бы указывать и условия эксплуатации.

Представление о том, что функция $x(t)$ имеет детерминированный характер, находится в противоречии с огромным опытом испытаний и поведения технических систем в условиях реальной эксплуатации. Специальные эксперименты, относящиеся к изнашиванию материалов в результате трения или ударного воздействия, старения вещества от электрического, химического, теплового, магнитного или вибрационного воздействия, приводят в общих чертах к одной и той же картине: одинаковые изделия, изготовленные в одних и тех же условиях, ведут себя при испытаниях или при эксплуатации различно, и всегда наблюдается значительный разброс траекторий $x(t)$. Экспериментальные исследования дают твердое основание для того, чтобы смотреть на $x(t)$ как на случайный процесс. Именно это представление и положено в основу подавляющего большинства работ по теории надежности. Однако следует заметить, что до сих пор эти процессы изучены недостаточно и многочисленные задачи, как теоретического, так и прикладного плана, требуют большего внимания к организации их изучения. По настоящее время, в сущности, имеются лишь результаты по исследованию длительности жизни некоторых технических систем.

§ 2. О некоторых задачах теории надежности

Посмотрим теперь, какие же задачи должна решать теория надежности. Очевидно, что первая из них состоит в определении надежности технической системы по известным надежностям ее компонент, а также в сравнении различных вариантов конструкции по их надежности.

Казалось бы, эти задачи не должны представлять серьезных затруднений. Однако в действительности это не так, поскольку компоненты системы связаны между собой множеством связей — в них имеются передаточные звенья, трущиеся пары, элементы, излучающие тепло, узлы и элементы, находящиеся при различных нагрузках. Более того, работа одних частей системы может приводить к возникновению дополнительных воздействий (магнитных, вибрационных, электрических, тепловых, радиационных и др.) на них и на другие части. Необходимо учитывать связи, степени влияния которых неизвестны. В силу сказанного любой расчет надежности следует рассматривать как некоторое приближение к действительности. По мере накопления опыта точность расчетов постепенно увеличивается и будет увеличиваться.

Несомненно, что другой важнейшей задачей теории надежности следует считать разработку планов испытаний продукции на надежность. Испытания нужно производить при оценке качества исходных материалов и полуфабрикатов, при изготовлении и сборке основных изделий, перед сдачей изготовленной продукции, для определения влияния длительного хранения и транспортировки, в период конструирования и изготовления опытных изделий. Этот последний тип испытаний представляет специфические трудности, состоящие прежде всего в том, что на этом этапе испытаниям подлежит небольшое число изделий, зачастую два-три (а иногда даже только одно) и при этом они изготовлены в особых условиях, когда производятся единичные экземпляры. При таком положении дел приходится решать ответственную задачу — принимать конструкцию, отправлять ее на доработку или же отвергнуть как неудачную. Именно в силу этой ответственности испытания должны быть тщательно продуманы во всех отношениях.

Небрежность, так же как и упрощенные, неполные испытания на стадии приемки конструкции, которые не включали бы в себя проверку ее действия в нормальных рабочих условиях, а также в утяжеленных, здесь недопустимы. Характерный пример этого рода был приведен два десятилетия назад газетой «Правда»*) относительно машины АОШ, предназначенной для очистки шкур от шерсти и мездры. Машина, сконструированная и изготовленная Грибановским машиностроительным заводом, была испытана Государственной комиссией только в облегченных условиях, не прошла рабочих испытаний, между тем была рекомендована для внедрения на заводы. Когда же на ряде заводов сняли старые машины, установили новые и запустили их в рабочем режиме, то оказалось, что ни одна из них не была способна справиться со своей работой. Новая техника оказалась неудачной, требующей значительной дополнительной доработки. Понесенные при этом убытки во многие десятки, а то и сотни раз превысили стоимость серьезных испытаний, которые должны бы были провести в рабочем режиме и не на одном, а на нескольких опытных экземплярах. Из подобных примеров, которых можно привести немало, следует сделать только один вывод: испытания сопровождают изделия техники с начала их конструирования и до окончания их эксплуатации и ни на одном этапе нельзя к ним и к их обработке относиться спустя рукава. Это может привести

*) «Правда», № 89 от 29.03.1964.

к серьезным авариям, к потере значительных материальных ценностей и интересных технических идей.

Вопросы испытания исходных материалов и полуфабрикатов не отличаются от тех, которые приходится решать при приемочном контроле готовой продукции, о чем мы расскажем в следующем параграфе. Здесь действуют хорошо разработанные правила статистического приемочного контроля, выведенные в естественном предположении, что производственный процесс стабилен и не подвержен резким колебаниям качества. Используемый при этом математический аппарат сводится к элементам теории вероятностей и математической статистике. Эта теория хорошо разработана и доведена до четких формулировок, пригодных для практического использования лицами без специального образования.

В тех случаях, когда проверяются все изделия и испытания не наносят ущерба качеству продукции, возникает необходимость привлечь к ним значительную часть персонала предприятий, не говоря уже о средствах испытаний и рабочих площадях под испытательные стенды. Если не разработаны только автоматические удобные и дешевые методы контроля, приходится ограничиваться проверкой лишь части продукции, особенно если сами испытания дороги. Такие методы называются *статистическими*.

Для примера, наша часовая промышленность ежегодно выпускает несколько десятков миллионов часов, пусть для определенности 20 миллионов. Если на испытание одних часов требуются только 6 мин (проверка сборки, завода, качества крепления стрелок и пр.), то на испытание всей массы продукции необходимо затратить два миллиона часов времени, т. е. 250 000 рабочих дней. На такое расточительство общество, естественно, пойти не может, и поэтому выработка простых и надежных статистических методов контроля представляет собой важную экономическую задачу, особенно если учесть, что и все остальные отрасли промышленности должны решать аналогичные вопросы.

Но когда речь идет о приемке продукции массового производства, в котором ежемесячно изготовляются десятки тысяч, а то и миллионы экземпляров определенного типа изделий (автомашин, болтов, телевизоров, сопротивлений), то сплошные испытания нет возможности проводить и по другой причине. Нередко испытания приводят к непоправимому изменению качества изделия, а то и попросту к полной его порче. Так, проверка фотопленки, фотобумаги, взрывателей приводит к тому, что ими воспользоваться после проверки уже невозможно — они полностью потеряли свои рабочие свойства. По этой причине здесь статистические методы контроля являются единственно возможными (конечно, лишь до тех пор, пока не будут придуманы другого типа испытания, которые не будут приводить к порче продукции и будут экономически доступными для сплошного контроля).

Гораздо более сложные проблемы возникают в тех видах производства, в которых приходится изготовлять либо уникальную продукцию, либо малые их серии. С такого рода случаем приходится сталкиваться при производстве мощных генераторов электрического тока, атомных электростанций и пр. Их в год изготовляют несколько десятков, а то даже и единиц. Поставить их на длительные и представительные испытания не представляется возможным. Отчасти это невозможно сделать и потому, что в уникальные изделия с течением времени вносятся улучшения и изменения конструктивного характера. Математическая теория таких, как правило, дорогих изделий, до сих пор еще не разработана.

Заметим, что испытания, проводимые в специальных лабораториях на стендах, обычно дают несколько завышенные значения наработки изделий до отказа. В реальных условиях случается, что в среднем при обычной эксплуатации устройства нарабатывают до отказа меньше, чем дают замеры на стендах. Так двигатели автомобилей и тракторов на стендах в среднем работают в 2—3 раза больше, чем при нормальной работе. Причин для этого много, и объективных и субъективных. К объективным относятся такие: резкие колебания температурных и вибрационных факторов, агрессивное влияние внешней среды — наличие в атмосфере химически активных веществ, повышенная влажность или сухость, усиленная запыленность и т. д. Субъективные причины — отсутствие надлежащей квалификации, невнимательное отношение к состоянию техники (несвоевременные смазка, подтяжка болтов, отсутствие очистки от пыли и грязи сочленений, несвоевременная заточка режущего инструмента и пр.). Хорошо известно, что бережное отношение к эксплуатируемой технике, высокая квалификация обслуживающего персонала, своевременная смазка и смена износившихся частей позволяют сократить число средних и капитальных ремонтов в 5—6 раз по сравнению с эксплуатацией на износ.

К сказанному следует добавить еще несколько слов. В технических системах нет мелочей. Крепление простого болта или качество копеечного реле может быть решающим для системы, состоящей из десятков тысяч деталей. Весьма поучительный случай произошел 3 июля 1962 г. на парижском аэродроме: пассажирский самолет «Боинг-707» потерпел аварию при взлете. Потери были не только материальные, были и человеческие жертвы. Как выяснила комиссия, обследовавшая причины аварии, она произошла из-за неисправности болта, крепившего рулевое управление. Цена этого болта 4 цента, потери же исчислялись миллионами долларов и десятками человеческих жизней. Приведенный пример относится к очень важной современной проблеме теории испытаний на надежность — испытаний в период эксплуатации. Это важно во всех областях техники, но особенно существенно на транспорте, в том числе и авиационном.

Хорошо известно, что фундамент надежности любого технического изделия закладывается при конструировании. Конструктор выбирает схему технического изделия, подбирает материалы, указывает точность обработки деталей. Если конструкция изделия неудачна, то самые лучшие материалы, самая высокая точность изготовления и тщательность эксплуатации не смогут ее превратить в хорошую. Сделать хуже можно, но без изменения принципа сделать конструкцию хорошей нельзя. Вот почему так важно в период разработки конструкции изделия самым детальнейшим путем просчитать взаимодействие узлов в разных условиях эксплуатации, исправить те узлы, в которых появляются повышенные напряжения (механические, температурные, электрические и любые иные), просчитать ее надежность и всесторонне испытать. Все это необходимо делать своевременно, пока конструкция не передана в массовое производство. Тогда исправления обойдутся во много раз дороже, поскольку придется изменять не только конструкцию, но и всю оснастку, необходимую для ее производства. К сожалению, на эту сторону дела обращают сейчас недостаточное внимание.

Надежность обеспечивается процессом изготовления. Действительно, заводы с доброй репутацией стремятся обеспечить хорошее качество, в том числе и надежность, каждого изделия. Однако на пути к этому возникает множество трудностей: несвоевременная поставка комплектующих изделий, недостаточно высокое их качество, недостаточный объем испытательных средств, изношенность оборудования, не слишком высокая квалификация рабочих. На плохо организованных предприятиях наблюдается неравномерность выпуска продукции на протяжении месяца и даже недели: нередко в первые дни недели выпускается ничтожная часть всего, что было запланировано, и только в последние ее дни производство резко увеличивается. В прекрасной книге Я. М. Сорина и А. В. Лебедева приведены такие характерные примеры: «На Алтайском тракторном заводе в первой декаде июля 1965 г. было выпущено всего лишь 5% тракторов, во второй — 17%, а в третьей декаде — 78%. На Барнаульском заводе механических прессов в первой декаде июля было выпущено 7% основного вида продукции, во второй — 11%, а остальные 82% — за последние 10 дней»*).

В авральной обстановке последних дней месяца порой просто невозможно обеспечить тщательный контроль качества и надежности выпускаемых изделий. И недаром умудренные опытом потребители предпочитают получать продукцию, выпущенную в начале месяца. Тогда и цехи «не гонят план», и контролер может спокойно проверить ее качество.

С тех пор прошло 18 лет, но, к сожалению, на ряде предприятий описанная практика сохраняется в полной мере. При

---

*) Сорин Я. М., Лебедев А. В. «Беседы о надежности», «Знание»,1968, с. 91.

этом контролеры в последние две недели месяца, квартала не только перегружены работой, но и поставлены в рамки приемки продукции, изготовленной при нестабильном режиме работы. При этом установленные правила контроля уже не действуют и вероятность ошибочной оценки качества резко возрастает.

В третьем периоде существования изделий техники заложенные в них надежность и качество во всей его широте должны сохраняться. Высокое качество эксплуатации является залогом долговечности и безотказности хорошо изготовленных технических систем. К сожалению, использование техники в период ее эксплуатации зачастую сопровождается грубыми нарушениями существующих правил. Неумелые действия оператора способны приводить и приводят к повышенному износу разного рода. Достаточно сказать, что эксплуатация двигателя автомашины при температуре —10—15 °С без предварительного разогрева эквивалентна 150 км пути на прогретом двигателе. Повышение температуры электрических проводов на 10 °С вдвое сокращает срок службы обмотки трансформаторов, электромоторов. Правила эксплуатации составляются на основе глубокого изучения предшествующего опыта. Вот почему так важно эти правила не нарушать, а совершенствовать.

Исключительно важно в период эксплуатации осуществлять качественный ремонт. Своевременная замена износившейся детали на новую и при этом хорошего качества — залог того, что изделие после ремонта будет длительно работать примерно как новое. Однако нередко можно наблюдать, что ремонт производится небрежно, а износившиеся части заменяются на части плохого качества. Понятно, что такого рода ремонт носит скорее психолого-косметический, чем реально значимый характер. К этому следует добавить, что нередко заводы-изготовители в качестве запасных частей поставляют то, от чего отказывается основное производство. Подсчеты потерь народного хозяйства от ремонтов низкого качества крайне необходимы, хотя они и не требуют каких-либо специальных математических средств. Сложнее обстоит дело с подсчетом необходимого для страны выпуска запасных частей и организацией снабжения ими. Для решения возникающих здесь задач требуются знания в области теории вероятностей, математической статистики, оптимального управления запасами и теории массового обслуживания. Весьма интересные математические задачи возникают при решении вопросов организации ремонта парков машин — автомобилей, тракторов, самолетов, станков. К сожалению, пока этим вопросам уделяют недостаточно внимания, а поэтому связанные с ними задачи еще далеки от удовлетворительного и исчерпывающего решения.

Каждый пользователь должен стремиться продлить «жизнь» эксплуатируемой им техники, стремясь сохранить при этом ее надежность. Достигается это многими способами: рациональной эксплуатацией, своевременным проведением профилактических осмотров и ремонтов, щадящими режимами эксплуатации, использованием доброкачественных смазочных масел и пр. Имеется и другая возможность продления срока службы изделий техники, связанная с конструкторской работой и процессом изготовления: выбор удачной конструкции, подбор соответствующих материалов, введение резервирования особо ответственных узлов, выработка рациональных инструкций по эксплуатации, проверка качества исполнения и сборки в процессе изготовления, выработка оптимальных правил поиска неисправностей. Все эти методы широко используются. В частности, большое значение имеет поиск принципиально новых конструктивных решений, позволяющих увеличивать безотказность, долговечность и ремонтоприспособленность изделий.

В современных технических системах насчитываются сотни тысяч и даже миллионы различных узлов, деталей и элементов. Так, автомобиль «Москвич» имеет около 10 000 деталей, вычислительная машина средней мощности насчитывает уже около миллиона элементов. Выход из рабочего состояния любого из них либо выводит машину из строя, либо нарушает режим ее нормальной работы. У вычислительной машины при этом появляются сбои в вычислениях. Возникает необходимость быстрой замены отказавшего элемента на новый. Но, спрашивается, как выявить этот отказавший элемент? Поиск наудачу не принесет быстрого успеха. Для такого поиска необходимо в среднем проверить половину всех элементов. Если на просмотр каждого элемента ЭВМ нужно потратить только одну секунду, то в среднем для поиска неисправности таким безсистемным методом потребуются 6 суток непрерывного поиска. Такой подход явно неудачен. Необходима *теория поиска неисправностей*, которая позволяла бы свести затраты времени к минимуму. Такие теории в настоящее время созданы. Возникающие в них задачи взяты непосредственно из актуальной инженерной практики, а математические решения весьма изящны и интересны.

Одним из распространенных и весьма действенных способов повышения надежности технических систем является резервирование, т. е. введение в схему дополнительных элементов, которые включаются в работу по мере выхода из строя основных. Простейшим примером резервированной системы может служить автомобиль с запасным колесом в багажнике. Оно приходит на смену рабочему колесу, отказавшему во время движения, и тем самым повышает надежность работы всего автомобиля. Естественно, что основная задача, стоящая перед теорией резервированных систем, заключается в подсчете эффективности введения резервных элементов, т. е. в ответе на вопросы: на сколько увеличивается длительность безотказной работы системы при введении того или иного числа резервных элементов? что дает восстановление отказавших элементов и включение их в резерв снова? что дает резервирование не элементами, а временем на выполнение задачи?

В последние годы, особенно в связи с развитием авиации и космических полетов, появились новые задачи: поиск кратности резервирования системы (различных ее узлов) при условии сохранения заданной стоимости, массы и объема. Это оптимизационные задачи теории надежности, представляющие большой как инженерный, так и математический интерес.

Многочисленные оптимизационные задачи возникают в теории надежности в связи с поиском наиболее выгодного промежутка между последовательными профилактическими осмотрами и ремонтами. Машина еще работоспособна, но в ней уже могли накопиться неисправности, которые при своевременном устранении не успеют причинить больших неприятностей и не причинят серьезных бед, в частности не приведут к поломке. И хотя введение профилактических ремонтов несколько уменьшает среднюю длительность непрерывной (безремонтной) эксплуатации, оно позволяет сэкономить значительные суммы. Приведем простой пример. Перед длительным рейсом рефрижератора с ценным грузом следует провести профилактический осмотр и замены недостаточно надежных узлов, грозящих отказом. Это необходимо сделать, поскольку отказ рефрижератора в пути приводит не только к повышенным расходам на ремонт, но и к опасности порчи груза из-за задержки в пути. В связи со сказанным возникает важная задача выяснения оптимальных сроков проведения профилактических работ в зависимости от стоимости аварийного и профилактического ремонтов, а также стоимости потерь при аварийном отказе. Все эти задачи, о которых только что шла речь, требуют не только широкого использования уже разработанных математических средств, но и создания новых, еще не существовавших в науке.

Мы теперь рассмотрим одну задачу резервирования, которая была рассмотрена профессором Московского Государственного Университета А. Д. Соловьевым. Задача проста, изящна и полезна для практики. Ее решение элементарно и доступно школьникам старших классов.

Резервировать можно различными способами: целое устройство; отдельный узел устройства; отдельные его элементы. Так, на узловых железнодорожных станциях резервируют целую систему: наряду с тепловозом, который должен пойти в рейс, имеется другой тепловоз, готовый заменить основной в случае его неисправности. Точно так же на электростанции рабочие генераторы резервируются запасными. На химических заводах, где особенно опасен отказ, управляющее устройство часто дублируют, и если работающее устройство откажет, немедленно включается ему на смену резервное.

Резерв бывает ненагруженным и нагруженным. В ненагруженном резерве устройство не работает и поэтому сохраняет свои свойства неизменными до того момента, пока оно не будет включено в работу на место отказавшего рабочего. Примером не-

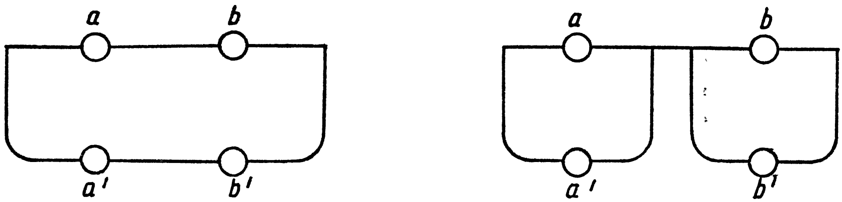


Рис. 1

нагруженного резерва может служить запасное колесо автомобиля в багажнике. Нагруженный резерв находится в таком же состоянии, как рабочее устройство. Для примера в двойном колесе на задней оси грузового автомобиля одно колесо можно считать рабочим, а другое находящимся в нагруженном (или горячем) резерве.

Мы докажем сейчас следующую теорему А. Д. Соловьева.

Теорема. *Если переключение резервных устройств (узлов, элементов, систем) происходит мгновенно и абсолютно безотказно, то увеличение масштаба резервирования уменьшает безотказность резервированной системы.*

Мы рассмотрим сначала простейший случай системы, состоящей всего-навсего из двух элементов a и b и резервных a' и b'. Резервирование может быть осуществлено двумя путями I или II (рис. 1). Первый означает резервирование системы целиком, а второй — резервирование поэлементное.

Обозначим через τ_1 и τ_2 длительности безотказной работы соответственно элементов a и b, а через τ_1' и τ_2' — элементов a' и b'. Далее обозначим через T_1 длительность безотказной работы резервированной системы при системном резервировании, а через T_2 — такое же время при поэлементном резервировании. При нагруженном резервировании длительность жизни основной группы элементов равна минимуму из τ_1 и τ_2, т. е. $\min(\tau_1, \tau_2)$. Точно так же длительность жизни резервной группы равна $\min(\tau_1', \tau_2')$. Вся резервированная система в первом случае резервирования (системой) просуществует

$$T_1 = \max[\min(\tau_1, \tau_2), \min(\tau_1', \tau_2')],$$

так как если основная система откажет раньше резервной, то работу будет продолжать резервная. А если резервная откажет раньше основной, то работу продолжит основная.

При поэлементном резервировании длительность жизни группы первых элементов равна $\max(\tau_1, \tau_1')$, вторых элементов $\max(\tau_1', \tau_2')$, а длительность жизни всей системы (второй способ резервирования) равна

$$T_2 = \min[\max(\tau_1, \tau_1'), \max(\tau_2, \tau_2')].$$

Поскольку

$$T_1 \leqslant \max(\tau_1, \tau_1'), \quad T_1 \leqslant \max(\tau_2, \tau_2'),$$

ясно, что

$$T_1 \leqslant \min[\max(\tau_1, \tau_1'), \max(\tau_2, \tau_2')] = T_2.$$

Для нагруженного резерва теорема доказана.

В случае ненагруженного резерва имеют место равенства

$$T_1 = \min(\tau_1, \tau_2) + \min(\tau_1', \tau_2')$$

и

$$T_2 = \min[\tau_1 + \tau_1', \tau_2 + \tau_2'].$$

Поскольку

$$T_1 \leqslant \tau_1 + \tau_1', \quad T_1 \leqslant \tau_2 + \tau_2',$$

то имеет место неравенство

$$T_1 \leqslant \min[\tau_1 + \tau_1', \tau_2 + \tau_2'] = T_2.$$

Теорема доказана полностью, но только для двух элементов. Нам нужно обобщить ее на случай произвольного числа элементов, из которых состоит система. Для этого мы разобьем большую систему на две маленьких. Для них теорема верна. Это рассуждение продолжаем и дальше. Таким образом, теорема оказывается верной и в общем случае.

§ 3. О статистических методах контроля качества массовой продукции

Задача постоянного повышения качества промышленной продукции для народного хозяйства является одной из самых существенных. От нее зависит прогресс производства и весь инженерно-технический прогресс, с ней связано наиболее полное удовлетворение потребностей граждан в изделиях техники. Оборудование высокого качества работает дольше и успешнее без частых профилактических осмотров и восстановлений, без дорогостоящих замен узлов и деталей, без неоправданно частых остановок на ремонт и на приведение в порядок. В результате каждый рубль, вложенный в процессе производства для целей повышения качества продукции, оборачивается многократной экономией для народного хозяйства в процессе эксплуатации. От того, насколько промышленности удастся повысить качество изделий, решительным образом зависит эффективность общественного производства, конкурентоспособность на внешнем рынке, экономия трудовых затрат общественных средств, материалов и так недостающих запасных частей, как в процессе изготовления, так и в процессе использования изготовляемых изделий.

Я позволю себе привести небольшой пример, заимствованный мной из реальной практики. На заводе автотракторных запасных частей производился небольшой узел, необходимый для работы двигателя. Эта простая деталь требовала очень большой точности изготовления, измерявшейся микронами. В ту пору, когда я и мои сотрудники пришли на завод, там удалось увеличить выпуск детали на 40% и, казалось бы, необходимость в этой детали должна была быть удовлетворена полностью. Однако, как выяснилось, дефицит этой детали увеличился. В чем причина? Выяснению этого явления мы посвятили ряд дней нашей работы на заводе. Мы изучили сотни деталей и выяснили, что столь резкое увеличение выпуска продукции было достигнуто за счет нарушения технологии изготовления. Вместо строгой цилиндрической формы стала допускаться конусность детали при первоначальной обработке. После цементации деталей при вторичной обработке конусность слегка уменьшали, но при этом срезался цементированный слой и местами уменьшалась прочность детали. Выяснилось, что средний срок службы детали при этом снижался до 60% от нормального. Естественно теперь спросить: каков же эффект такого рода «совершенствования» технологического процесса и увеличения выпуска продукции? Легко понять, что вся масса выпущенных деталей способна обеспечить лишь

$$140 \cdot 0{,}6\% = 84\%$$

первоначально выпускавшейся продукции. Таким образом, несмотря на резкое увеличение числа выпускаемых деталей их рабочая жизнь составляет лишь 84% от того, что было до «усовершенствования». Иными словами, то, что произошло на заводе, следует рассматривать как провал, как вредную операцию, от которой следует как можно быстрее вернуться к старому положению вещей. Завод стал использовать почти в полтора раза больше металла, расходовать средства на его перевозку и обработку, затрачивать соответственно больше электроэнергии на обработку, и все ради того, чтобы уменьшить на 16% общее рабочее время изготовления продукции.

Результаты нашего исследования были сообщены дирекции завода, в соответствующие отделы Министерства. К сожалению, в умах многих мысль о приоритете количественного выпуска продукции засела так глубоко, что для них становится парадоксальным сам вывод о том, что далеко не каждое количественное увеличение может быть полезно для народного хозяйства и, что, как правило, повышение качества продукции одновременно означает и увеличение количественного ее выпуска. Проверка качества изготовленной продукции представляет собой совсем не простую задачу. Мы сейчас укажем только на две причины.

Во-первых, часто проверка качества связана с частичной или полной порчей изделия. Так, проверка электрической лампочки на срок службы приводит к уменьшению времени ее полезного действия во время эксплуатации. Проверка фотопленки или фотобумаги на качество изображения означает, что эта пленка и бумага уже не могут быть использованы. Во-вторых, современные объемы производства так велики, что проверка качества изготовленной продукции потребует такой затраты труда и средств, что зачастую они сравнимы с затратами на производство. Для примера автомат по производству пуговиц за минуту изготовляет сотни, а то и тысячи пуговиц, а проверка качества каждой пуговицы требует по меньшей мере 15—20 секунд. В результате, как правило, сплошная проверка качества изготовленных изделий не может быть осуществлена даже при наличии совершенной измерительной аппаратуры и хорошо оборудованных испытательных стендов. Во многих случаях нужно искать достаточно надежные методы проверки качества больших партий изделий, когда приходится проверять качество не каждого изделия данной партии, а только сравнительно небольшой их части. Такие методы получили наименование *статистических методов приемочного контроля качества* и нашли широкое применение на практике. Идеи статистических методов зародились еще в XVIII веке. Впервые их, по-видимому, высказал английский математик Томас Симпсон (1710—1761). Однако в ту пору его идеи не нашли никакого использования.

Отечественная наука уже в прошлом веке обратила внимание на ряд важных вопросов, связанных с оценкой качества принимаемой продукции. Эти работы были начаты М. В. Остроградским и продолжены В. Я. Буняковским. В одной из работ М. В. Остроградского содержатся начатки того направления исследований, которое в наши дни получило наименование статистических методов приемочного контроля массовой промышленной продукции. Позднее в этом направлении работали В. И. Романовский, А. Н. Колмогоров, а также их ученики и последователи.

В работе «Об одном вопросе, касающемся вероятностей», опубликованной М. В. Остроградским в 1846 г. и теперь легко доступной, поскольку она опубликована в третьем томе собрания сочинений знаменитого математика (изд-во АН УССР, 1961), даны формулировка и решение следующей задачи.

«В сосуде имеются белые и черные шары, общее количество которых нам известно, но мы не знаем, сколько из них какого цвета. Мы извлекаем некоторое количество этих шаров и, подсчитав, сколько из них белых и сколько черных, снова кладем их в сосуд. Требуется определить вероятность того, что общее число белых шаров не выходит из наперед назначенных пределов. Или, лучше сказать, мы ищем зависимость между этой вероятностью и пределами, о которых идет речь.

Чтобы понять важность этого вопроса, представим себя на месте того, кто должен получить большое количество предметов, причем должны выполняться некоторые условия, и кто, чтобы проверить эти условия, должен на каждый предмет потратить некоторое время. Перед армейскими поставщиками часто стоят такого рода задачи. Для них шары, содержащиеся в сосуде, представляют получаемые предметы, белые, например,— предметы приемлемые, как удовлетворяющие определенным условиям, а черные — неприемлемые.

Таким образом, если бы вопрос, который мы перед собой поставили, был решен, поставщик мог бы воспользоваться этим, чтобы свести приблизительно к двадцатой доле часто очень утомительную механическую работу, как, например, проверку большого количества мешков муки или штук сукна».

Задача Остроградского до нашего времени сохранила свое прикладное значение, только широта ее применений выросла многократно. Дело в том, что теперь с ней приходится сталкиваться в любом производстве как на начальном цикле технологического процесса, когда приходится принимать изделия производства-смежника, так и на заключительном этапе, когда необходимо сдавать приемщику уже полностью готовую продукцию. Приемочные операции, которые приходилось выполнять в прошлом веке, полностью сохранились и в наше время, только увеличился ассортимент принимаемых изделий и их количество.

Для организации приемочного контроля прежде всего следует выработать систему правил, которых следует придерживаться, или, как принято говорить, план контроля. В плане контроля следует указать: как выбирать изделия для контроля, сколько изделий нужно проверить, когда принимать решение о качестве проверяемой партии продукции. В заводской практике наибольшее распространение получили три плана статистического контроля по качественному признаку (т. е. по признаку: годен, негоден). Каждому изделию при этом присваивается одно из двух качеств: изделие пригодно для использования, изделие дефектно и использовать его нельзя. С таким видом контроля мы сталкиваемся при покупке в магазине электрических лампочек. Продавец только проверяет, загорается лампочка или нет, но он не стремится выяснить, как долго сможет выполнять лампочка положенные ей функции. Для этого у него даже нет возможности. Мы хотели только проиллюстрировать, что разбивать продукцию на два класса — годная и негодная — приходится на практике весьма часто.

Мы сказали, что в практической работе используют три плана статистического приемочного контроля. Перечислим их.

П л а н о д н о к р а т н о й в ы б о р к и. Из партии объема N наудачу выбираются n изделий ($n<N$) для проверки. Заранее задается п р и е м о ч н о е ч и с л о c (c — целое число). Если среди проверенных изделий число дефектных $d(n)$ не превышает c ($d(n) \leqslant c$), то партия принимается. Если же число дефектных оказалось бо́льшим, чем c, то партия бракуется.

Иногда этот план трансформируется и используется в более сложном варианте, который обычно используется, когда продукция дорога. Этот вариант состоит в следующем: задаются два целых числа c и c' ($c \leqslant c'$). Партия принимается, если $d(n) \leqslant c$; партия бракуется, если $d(n) > c'$. Если же $c < d(n) \leqslant c'$, то партия направляется на сплошной контроль. Разумеется, что этот контроль должен быть неразрушительным.

П л а н д в у к р а т н о й в ы р а б о т к и. Из партии объема N случайно выбирается первая выборка объема n_1. Если число дефектных изделий в первой выборке $d(n) \leqslant c_1$, где c_1 — заранее заданное число, то партия принимается. Если $d(n_1) > c_2$ (c_2 задано), то партия бракуется. Если же $c_1 < d(n_1) \leqslant c_2$, то из оставшейся части партии производится дополнительная выборка объема n_2. Если общее число зарегистрированных дефектных изделий $d(n_1+n_2) \leqslant c_2'$, то партия принимается; если же $d(n_1+n_2) > c_2'$, то партия бракуется.

Как правило, c_1' и c_2' выбираются равными. Если же $c_1' < c_2'$, то в случае $c_1' < d(n_1+n_2) \leqslant c_2'$ производится сплошная разборка продукции. Это обычно делается, если процедура проверки проста и дешева, а продукция относительно дорога.

П л а н п о с л е д о в а т е л ь н о г о а н а л и з а. Заранее задаются объемы последовательных выборок n_i, $i=1, 2, 3,...$; при каждом допустимом i суммы $n_1 + ... + n_i$ меньше, чем N. Далее задаются пары чисел (c_i, c_i'), $(c_i < c_i')$. В начале контроля берется выборка объема n_1. Если число дефектных изделий в партии $d(n_1) \leqslant c_1$, то партия принимается как хорошая, если $d(n_1) > c_1'$, то партия бракуется; если же $c_1 < d(n_1) \leqslant c_1'$, то берется вторая выборка объема n_2. В результате проверки при $d(n_2) \leqslant c_2$ партия принимается, при $d(n_2) > c_2'$ партия бракуется и, наконец, в случае $c_2 < d(n_2) \leqslant c_2'$ берется третья выборка объема n_3 и с ней поступают аналогично, принимая одно из трех возможных решений — принять, отвергнуть, продолжать контроль.

Каждый из только что перечисленных планов контроля обладает своими достоинствами и недостатками. Так, планы однократной выборки значительно проще с организационной и теоретической точек зрения. В планах последовательного контроля при том же объеме выборки удается получить бо́льшую точность соответствия решения истинному состоянию качества продукции.

Остановимся еще немного на планах однократной выборки. Мы видели, что в результате выборочных испытаний могут быть приняты три взаимоисключающих решения:

D_1 — оставшаяся непроверенной часть партии отвергается без дополнительного контроля как дефектная;

D_2 — оставшаяся непроверенной часть партии подвергается 100%-му контролю;

D_3 — непроверенная часть партии принимается как вполне качественно пригодная без дополнительной проверки.

В связи с этим возможны следующие три типа планов при заданном объеме выборки n и приемочном числе c: $(n, c)_{12}$, $(n, c)_{13}$, $(n, c)_{23}$.

В плане $(n, c)_{13}$ предполагается, что из партии будут отобраны и проверены только n изделий. Если окажется, что $d(n) > c$, то партия отвергается без дополнительного анализа непроверенных изделий; если же $d(n) \leqslant c$, то оставшаяся часть партии принимается как годная также без дополнительных исследований. Этот план контроля используется, как правило, либо тогда, когда контроль изделий является разрушающим, либо когда стоимость проверки велика, либо когда опасность использования некачественного изделия невелика.

План типа $(n, c)_{12}$ используется, когда требования к изделиям очень жесткие, а стоимость контроля не высока. При этом типе контроля в случае $d(n)>c$ партия отвергается без дополнительного контроля, а при $d(n)\leqslant c$ — организуется сплошной контроль оставшейся части партии. Естественно, что контроль при этом предполагается неразрушительным.

Планы типа $(n, c)_{23}$ находят применение как при разрушающем, так и при неразрушающем контроле, когда представляет интерес получение дополнительной информации о качестве продукции. Для этих планов при $d(n)\leqslant c$ партия принимается без дополнительного обследования, но при $d(n)>c$ оставшаяся часть партии подвергается сплошному контролю. Здесь для приемщика интересно выявление повышенной засоренности партии, и дополнительное обследование позволит изменить в случае надобности технологический режим на производстве.

При статистическом приемочном контроле может случиться, что партия, вполне удовлетворительная по используемому критерию приемки, не будет принята, поскольку в выборку попали чисто случайно дефектные изделия в повышенном числе. Получается парадоксальное явление: в результате проверки партия очистилась от дефектных изделий, но мы ее забраковали, поскольку попалось слишком много дефектных изделий. Может случиться и обратное — сильно засоренная партия принимается только потому, что в выборке оказалось большое число годных изделий. Обе такие возможности при хорошо налаженном производстве, когда нет частых сбоев в установленном оборудовании, случаются крайне редко, их вероятности малы.

Вероятность забракования хорошей партии носит название *риска поставщика* или же, как это принято в математической статистике, *ошибки первого рода*. Вероятность приемки плохой партии называется *риском потребителя*, или же *ошибкой второго рода*. Риск поставщика обозначается обычно буквой α, а риск потребителя — буквой β. Рациональная организация статистического приемочного контроля состоит, очевидно, в том, чтобы обе ошибки — α и β — сделать по возможности малыми. Очевидно, что на величину этих ошибок существенно влияют объем партии, объем выборки n, а также приемочное число c, которое разделяет приемлемые по качеству партии от тех, которые следует браковать.

Разберемся с введенными понятиями на примере плана $(n, c)_{13}$. Пусть в партии содержится N изделий и D из них бракованные. Очевидно, что если $D\leqslant c$, то ни при какой выборке партия не может быть забракована. Интерес для нас может представлять лишь случай $D>c$. Мы должны теперь условиться еще раз о том, что мы станем считать приемлемой и плохой партиями.

Пусть $c_1 < c_2$. Если $D > c_2$, то мы скажем, что партия сильно засорена и непригодна для использования; при $c_1 < D \leqslant c_2$ — допустимой, а при $D \leqslant c_1$ — хорошей. При нашем условии партия принимается, если $D \leqslant c_2$, и должна быть забракована при $D > c_2$. Подсчитаем теперь вероятности α и β. С этой целью решим прежде всего следующую элементарную задачу: в партии из N одинаковых изделий содержится D дефектных. Из этой партии наудачу извлекаются n изделий. Чему равна вероятность того, что d из них окажутся дефектными?

Мы сейчас убедимся в том, что искомая вероятность равна

$$(1) \qquad \pi_d = \frac{C_D^d C_{N-D}^{n-d}}{C_N^n}, \quad d = 0, 1, 2, \ldots, \min(n, D).$$

Действительно, n изделий из N возможных можно извлечь C_N^n различными способами. Это — общее число возможных случаев. Благоприятствовать извлечению d бракованных изделий из D возможных будут C_D^d случаев; точно так же выбрать $n-d$ годных изделий из $N-D$ можно C_{N-D}^{n-d} различными способами. Таким образом, общее число различных способов извлечения d бракованных изделий и $n-d$ годных равно $C_D^d\ C_{N-D}^{n-d}$. Отсюда приведенная нами формула. Число d, очевидно, не может превзойти с одной стороны числа n, а с другой — числа D. Отсюда ограничение на возможные значения параметра d.

Про случайную величину d, принимающую только целочисленные значения от 0 до $\min(n, D)$ с вероятностями π_d, определяемыми формулой (1), говорят, что она имеет «гипергеометрическое распределение». Путем несложных вычислений можно показать, что доля дефектных изделий в выборке вычисляется по формуле

$$M\frac{d}{n} = \frac{D}{N},$$

а дисперсия этой доли равна

$$D\frac{d}{n} = M\left(\frac{d}{n} - \frac{D}{N}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{D(N-D)}{N^2}.$$

Обратим внимание на то, что математическое ожидание доли бракованных изделий в выборке совпадает с долей бракованных изделий во всей партии. Таким образом доля бракованных изделий в выборке служит несмещенной оценкой для доли бракованных изделий в партии. Это важный вывод, поскольку он позволяет по результатам контроля выборки делать заключение о засоренности продукции в партии.

Несложными преобразованиями легко проверить, что вероятности π_d могут быть записаны и в ином виде, а именно

$$(1') \qquad \pi_d = \frac{C_n^d\, C_{N-n}^{D-d}}{C_N^D}.$$

Обе формулы (1) и (1′) находят применения в теории статистического приемочного контроля.

Вернемся к подсчету вероятностей α и β. С этой целью введем в рассмотрение величины p_D — вероятности того, что число дефектных изделий в партии окажется равным D. В принципе D может принимать все целые значения от 0 до N. Согласно формуле полной вероятности имеют место равенства

$$\alpha = \sum_{D=0}^{c_2} p_D \sum_{d=c+1}^{\min(n,\, D)} \pi_d; \quad \beta = \sum_{D=c_2+1}^{N} p_D \sum_{d=0}^{c} \pi_d .$$

Здесь вероятности p_D нам неизвестны, а для использования написанных формул их знание необходимо. При одном естественном предположении мы укажем, как они могут быть найдены. М. В. Остроградский в упомянутой ранее работе считал, что все возможные предположения о значении D равновероятны. Эта его гипотеза основана на широко распространенной в начале прошлого века идее: «раз нам неизвестно, что за состав изделий имеется в партии, а логически возможно, что в партии будет любое число дефектных изделий от 0 до N включительно, то мы можем считать все возможные случаи равновероятными». Конечно, такой подход не выдерживает критики и на него следует смотреть как на попытку делать положительные выводы об изучаемом явлении на базе полного незнания.

В рассматриваемом нами случае положение иное, поскольку для хорошо налаженного технологического процесса, обладающего однородностью выполнения операций и подбора исходных материалов, можно сделать некоторые общие выводы. Прежде всего технологический процесс налажен так, чтобы в основном производить хорошие изделия, появление дефектного изделия должно рассматриваться как случайное совпадение ряда маловероятных обстоятельств — локальной неоднородности исходных материалов, колебаний напряжения в сети, из-за чего терялась однородность обработки, неточных действий оператора и пр. В результате появление дефектного изделия оказывается случайным событием, имеющим некоторую неизвестную нам вероятность появления p. На базе наблюдений эту вероятность можно оценить. Технологическая дисциплина и усовершенствование принципов труда, отбора и использования исходных материалов направлены на то, чтобы сделать эту вероятность p по возможности меньшей. К сожалению, пока мы не можем добиться того, чтобы сделать ее равной 0, поскольку всегда сохраняются локальные неоднородности исходных материалов, небольшие колебания в состоянии обрабатывающего инструмента, его креплении и пр. Заметим, что наличие некоторой вероятности p изготовления дефектного изделия совсем не означает, что невозможно улучшить технологический процесс и добиться серьезного улучшения качества продукции, т. е. уменьшения вероятности p. Для этого необходимо научиться строже отбирать партии полуфабрикатов, не допуская до обработки те из них, которые способны дать повышенный процент брака, ужесточить требования к наладке оборудования, исключить использование некачественного инструмента и пр. А главное — постоянно искать неиспользованные резервы увеличения качества продукции, выяснять причины появления дефектных изделий, искать лучшее как на стадии изготовления, так и на стадии использования изготовленных изделий.

В связи со сказанным мне хотелось бы описать один эпизод. Как-то мне довелось быть в одном из областных центров на открытии Дома техники. После торжественных речей и докладов ко мне обратились молодые инженеры, физики и математики, работавшие на одном из современных заводов. Они показали тщательно собранные и обработанные статистические данные относительно качества одного из весьма важных элементов электронной техники. Выход дефектных изделий в ту пору был очень высок. Ни к тому, как были собраны исходные статистические материалы, ни к их обработке у меня не было никаких претензий. Все это было сделано безупречно и я бы даже сказал — изящно. Но они упустили из вида самое важное: из полученных результатов не сделали необходимых выводов и не попытались проанализировать причины преждевременных массовых отказов. А ведь именно в этом и заключается смысл сбора статистических данных и их обработки. Это пожелание им и было высказано в определенной и даже достаточно категорической форме. Позднее они несколько раз приезжали в Москву для встречи со мной и вскоре привезли интереснейший вывод, подтвержденный удачно собранными статистическими данными. Оказалось, что приблизительно 96% всех преждевременных отказов элементов были вызваны наличием микроцарапин и микротрещин на керамической основе элемента. Позднее специально поставленными наблюдениями удалось установить, что статистически достоверно увеличение среднего срока службы тех элементов, на керамической основе которых отсутствуют микроцарапины и микротрещины, в среднем в тысячи раз по сравнению со средним достигнутым сроком службы.

Само собой напрашивалось естественное продолжение работы: так организовать технологический процесс, чтобы керамические основы с царапинами и трещинами не попадали в дальнейшую обработку. Но как этого добиться? Первоначально возникло предложение использовать хорошо сфокусированный световой луч и с его помощью автоматически отбрасывать дефектные керамические основы. Этот способ оказался неудачным. Но мысль уже работала и вскоре удалось найти простое и оригинальное решение вопроса, использующее лазерный луч. Однако нужно было воздействовать и на сам процесс изготовления керамической основы. Там также пришлось навести порядок. В результате появилась буквально лавина идей, которая привела к полному изменению технологии изготовления элемента. В течение каких-нибудь трех лет эта группа молодых людей зарегистрировала несколько изобретений, которые позволили автоматизировать технологический процесс, в том числе и контроль качества исходных материалов, резко повысить качество продукции (в том числе в сотни раз повысить минимальный срок службы годного изделия) и принципиально увеличить производительность оборудования. Доля же дефектных изделий снизилась до десятых долей процента. Изложенный здесь эпизод приведен с единственной целью — продемонстрировать следующую простую мысль: нас повсюду в обыденной практике окружают возможности открытия, нужно только научиться внимательно смотреть и замечать то, что мешает движению вперед, что требует изменения, а далее упорно искать то, что следует предложить в замену устаревшему и неудачному. В таких поисках неоценимую помощь оказывает направленное научное исследование, поиск объективных закономерностей, проникновение в природу вещей. Все разговоры об отсутствии творческих способностей, как правило, означают лишь прикрытие для лени ума. Нужно помнить о том, что способности имеются у каждого, нужно только научиться ими пользоваться и не забывать о том, что «кто ищет, тот всегда найдет».

Теперь мы вернемся к выводу из общей схемы хорошо налаженного технологического процесса, которая была нами подробно описана. Мы показали, что дефектные изделия могут в указанных условиях появляться случайно, каждый раз с малой вероятностью p. Отсюда вытекает, что вероятность того, что в партии из N изделий будет ровно D дефектных, должна вычисляться по формуле Бернулли, а именно

$$p_D = C_N^D\, p^D\, (1-p)^{N-D}, \quad D = 0,1,2,\ldots,N.$$

Может случиться, что партия не будет вовсе содержать дефектных изделий. Вероятность этого равна, согласно формуле, $(1-p)^N$. При малых p эта вероятность хорошо аппроксимируется экспонентой e^{-pN}. Точно так же вероятность того, что все изделия в партии окажутся дефектными, равна $p_N = p^N$. При малых p, например при $p = 0{,}01$, эта вероятность будет ничтожно мала, а именно при $N = 1000$ $p_N = 0{,}01^{1000} = 10^{-2000}$.

Наиболее вероятное число дефектных изделий в партии, как известно из теории вероятностей, равно целому числу, ближайшему к pN. В нашем примере $p = 0{,}01$, $N = 1000$ чаще всего в партии будет около 10 дефектных изделий.

Интересно заметить, что бернуллиевское распределение дефектных изделий будет не только в самой партии, но и в любой случайной из нее выборке, а именно в выборке объема n

$$P\{d(n) = d\} = C_n^d\, p^d\, (1-p)^{n-d},$$

где $d(n)$ — число дефектных изделий в выборке, а d — любое из чисел $0, 1, 2, \ldots, n$.

Этот факт совершенно очевиден, но для тех, кто предпочитает аналитические выкладки, мы приведем следующее рассуждение. Согласно формуле полной вероятности

$$P\{d(n)=d\}=\sum_{D=0}^{N} p_D P\{d(n)=d/D\},$$

где $P\{d(n)=d/D\}$ означает условную вероятность того, чтобы в выборке из n изделий появятся d дефектных при условии, что во всей партии имеется D дефектных. Но эти условные вероятности обращаются в 0, если $D<d$ и $D>N-n+d$ Таким образом,

$$P\{d(n)=d\}=\sum_{D=d}^{N-n+d} p_D\, P\{d(n)=d/D\}.$$

Но мы знаем, что (далее использовано обозначение $q=1-p$)

$$p_D=C_N^D\, p^D\, q^{N-D}$$

и что

$$P\{d(n)=d/D\}=\frac{C_n^d\, C_{N-n}^{D-d}}{C_N^D}.$$

В результате

$$P\{d(n)=d\}=\sum_{D=d}^{N-n+d} C_N^D\, p^D\, q^{N-D}\, \frac{C_n^d\, C_{N-n}^{D-d}}{C_N^D}=$$

$$=C_n^d\, p^d\, q^{N-D} \sum_{D=d}^{N-n+d} C_{N-n}^{D-d}\, p^{D-d}\, q^{N-n-D+d}=C_n^d\, p^d\, q^{n-d},$$

что и требовалось доказать.

Естественно, что если производственный процесс лихорадит и непрерывно изменяются характеристики точности изготовления, наблюдаются неравномерности в качестве сырья и полуфабрикатов, то сделанные нами выводы уже не могут считаться правильными.

Теория приемочного статистического контроля в настоящее время хорошо разработана и широко используется на многих производствах с большой пользой для дела.

Как-то лет двадцать — двадцать пять назад на одном из заводов ряд инженеров высказали сомнения в надежности методов статистического контроля качества продукции и заявили, что сплошной контроль несравненно точнее статистического. Для того чтобы проверить это утверждение, я попросил главного инженера выделить в мое распоряжение нескольких лучших контролеров на два дня. Эти контролеры были разбиты на две группы примерно в отношении 3:1. Первая группа занималась сплошным контролем ряда партий, а вторая — статистическим. Различие в числе контролеров было предусмотрено так, чтобы и те, и другие проверили одинаковое число партий. Результаты контроля партий были тщательно отмечены и на следующий день вновь предъявлены тем же контролерам как вновь изготовленная продукция. Каково же было удивление инженерного персонала, когда оказалось, что некоторые партии продукции, принятые накануне контролерами сплошной проверки, были забракованы на второй день, а часть забракованных ими партий при повторном контроле была принята. Статистический же контроль дал за исключением одной партии в точности те же результаты. Одна партия, забракованная накануне, была принята при повторном контроле. По-видимому, это объясняется тем, что при контроле партия была очищена от излишних дефектных изделий.

Начали искать объяснение кажущемуся парадоксу. Его предложили сами контролеры: когда контролер знает о предстоящей большой и напряженной работе, он становится не очень внимательным даже в начале рабочего дня. Такое поведение человека при монотонной, требующей постоянного напряжения, работе психологически вполне объяснимо. И хотя контролерам «статистическими методами» было дано большее число партий для проверки, все же общий объем инспекции для них был меньшим раза в два-три и они могли работать более спокойно, не очень заботясь о высокой загрузке.

Статистическим методам контроля принадлежит большое будущее, и поэтому было бы очень полезно ознакомить учащихся с этим применением математики в актуальной практической деятельности.

§ 4. Об управлении качеством массовой промышленной продукции

В предыдущем параграфе мы рассмотрели важную задачу разделения уже изготовленных партий продукции на хорошие и неудовлетворительные. Но естественно возникает вопрос: а нельзя ли еще в процессе производства так вмешиваться в технологический процесс, чтобы своевременно улавливать саму возможность производства продукции низкого качества и вовремя вмешиваться в само производство путем проведения необходимых подналадок оборудования, изменения скорости обработки, температурного режима и пр.? Так поставленный вопрос означает активное вмешательство в сам производственный процесс путем управления качеством изготавливаемой продукции. Речь идет о том, чтобы не отбраковывать изготовленные с дефектами изделия, а стремиться не допустить саму возможность их изготовления.

Несомненно, что решение этой задачи требует разработки и осуществления серьезных мер организационного и технологического характера. Но обоснованное управление нуждается также и в чисто научном исследовании, как технологических процессов, так и зависимости выходного качества продукции от условий, в которых протекает производственный процесс. Здесь в основе всех работ лежит простая мысль — нельзя управлять качеством, если предварительно не выяснить причины появления брака и не оценить степень влияния каждой из них на качество изделий. Далее следует разработать методы, которые позволяли бы устанавливать те моменты, когда на технологический процесс начинает действовать какая-то причина, которая при своем развитии приводит к появлению дефектной продукции. Нужно также разработать меры, которые позволяют устранять эту причину и приводить технологический процесс в нормальное состояние. Задача состоит в том, чтобы установить момент, когда бракованная продукция еще не производится, но уже появляется возможность ее изготовления. Именно в этом и состоит основная идея управления качеством продукции в процессе ее изготовления.

Само собой разумеется, что управление качеством продукции должно начинаться с проверки качества сырья и полуфабрикатов, тщательной наладки производственного оборудования, затем переходить к регулярной проверке качества выполнения операций в процессе производства и, наконец, осуществлять контроль качества всей массы изготовленной продукции. На первой и последней из только что упомянутых нами стадий естественно использовать уже знакомые нам методы приемочного статистического контроля. Остается разработка методов контроля на второй стадии, т. е. методов контроля качества исполнения и определение моментов разладки оборудования в процессе производства.

Здесь могут быть два различных подхода. Один из них предполагает непрерывную проверку качества изготовления и технологической приспособленности производства к выпуску продукции нормального качества. Другой исходит из идеи выборочного контроля посредством проверки малых выборок (5—10 штук) через определенные промежутки времени. Эти проверки должны осуществляться не слишком редко, чтобы не пропустить момента разладки, и не слишком часто, чтобы частыми переналадками и отвлечениями не лихорадить сам производственный процесс.

Обычно, особенно в металлообрабатывающей промышленности, контрольные выборки и необходимые выводы из них делают не специальные лица, а сами производственные рабочие. Выводы о том, продолжать ли процесс или же прерывать работу и производить подналадку оборудования, делаются по специальным правилам, о которых речь пойдет позднее. К производству этих заключений рабочие привыкают очень быстро и при этом убеждаются в том, что такой прием предоставляет богатые возможности добиваться стабильности производственного процесса, значительно повышать качество выпускаемой продукции и вместе с этим повышать заработок. Все же следует отметить, что необходимость ручных измерений является значительным тормозом в распространении методов статистического управления технологическими процессами. Несомненно, что при этом определенное влияние оказывают и психологические причины — ведь нужно, казалось бы, производить дополнительную, пусть и небольшую работу. Но имеется другая, несравненно более существенная причина — высокие скорости многих технологических процессов. Они теперь настолько велики, что пока оператор успевает произвести измерение параметров одного изделия, автомат успевает изготовить сотни новых изделий, а прокатный стан прокатать сотни метров продукции. В результате оказывается, что информация о ходе процесса изготовления, а тем самым и о качестве изготовляемой продукции запаздывает, а вместе с тем запаздывает и сигнал о необходимом управляющем воздействии. Вот почему так остро возникает необходимость автоматического съема информации о ходе производственного процесса и качестве изготовляемой продукции. Но мало собрать информацию, необходимо ее обработать и определить требуемое управляющее воздействие в каждый данный момент, а также передать его на исполнительные органы. Именно таким образом можно обеспечить стабильное качество изготовляемой продукции.

В последние годы был создан ряд таких устройств, которые автоматизируют управление качеством продукции. Пожалуй, промышленность электронного приборостроения была инициатором этой работы. Были изготовлены автоматы, отбрасывающие те полуфабрикаты, которые могут привести к пониженному качеству окончательных изделий. Были разработаны и системы управления качеством.

Специалисты, участвующие в разработке систем управления качеством в процессе изготовления продукции, высказали ряд принципов, которые должны соблюдаться во всем процессе производства. Эти принципы до тривиальности просты, но, к сожалению, зачастую нарушаются. Вон они:

1. На производстве нет несущественных операций, на которых можно ослаблять требования к качеству исполнения.

2. Если оборудование не соответствует задаче обеспечения тех требований, которые предъявляются к продукции, его необходимо заменить или же спроектировать новое, которое способно дать нужное качество.

3. Обработке следует подвергать только сырье и полуфабрикаты хорошего качества, иначе рабочая сила, станочное время, материалы, энергетические ресурсы и транспорт пойдут на изготовление дефектных изделий.

4. Те изделия, в которых обнаружены дефекты или же свойства, способные вызвать брак, из дальнейшего технологического процесса должны быть исключены.

5. Необходимо систематически изучать причины появления дефектной продукции и своевременно их устранять.

6. Поскольку нередко изготовление изделия требует значительно меньшего времени, чем проверка его качества, необходимы автоматы, приспособленные к проверке качества в процессе работы.

Следует сказать, что до сих пор бытует мнение, что если для изготовления продукции нужны многочисленные операции, то ошибки и неточности в изготовлении, допущенные на одной операции, компенсируются неточностями, допускаемыми на других операциях. При этом нередко ссылаются для обоснования этого утверждения на закон больших чисел в форме П. Л. Чебышева. В действительности каждая неточность, допущенная при изготовлении, влечет за собой новые неточности, и изделие обрастает дефектами, поскольку каждая операция выполняет свою функцию и не рассчитана на исправление ранее допущенных огрехов.

Очень часто управление процессом идет по слежению за одним параметром, который может принимать все возможные значения в некотором отрезке. Например, может случиться, что этим определяющим параметром будет длина изделия или его диаметр. При обработке, в силу разных причин, этот размер выдерживается не с абсолютной точностью и от изделия к изделию изменяется. Если отклонения размера от номинала невелики, то это вполне допустимо и задача управления состоит в том, чтобы не допустить больших отклонений от номинала в ту и другую сторону. Возможно, что таким управляющим параметром будет температура обработки или напряжение тока, под которым находится изделие.

Обработка огромных масс информации показывает, что уклонение управляемого параметра от номинала является случайной величиной, имеющей ту или иную функцию распределения вероятностей, т. е. функцию

$$F(x)=P\{\xi<x\}.$$

Часто случается, что

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz,$$

где параметр a равен математическому ожиданию, а σ^2 — дисперсии ξ. Заметим, что для нормального распределения имеют место равенства

$$\begin{aligned} P\{-0{,}675\sigma\leqslant\xi-a<0{,}675\sigma\}&=0{,}5003;\\ P\{-\sigma\leqslant\xi-a\leqslant\sigma\}&=0{,}6826;\\ P\{-2\sigma\leqslant\xi-a\leqslant 2\sigma\}&=0{,}9544;\\ P\{-3\sigma\leqslant\xi-a\leqslant 3\sigma\}&=0{,}9973.\end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что нормально распределенная случайная величина с вероятностью, приблизительно равной 0,5, попадает в отрезок ($-0{,}675\sigma$, $0{,}675\sigma$). С такой же вероятностью она может принять значение и вне этого отрезка. Но если расширить этот отрезок до (-2σ, 2σ), то в него попадает уже более 0,95 наблюдений и лишь несколько менее 0,05 может попасть вне отрезка. Вот на этих простых соображениях и основано управление производственным процессом для получения стабильного качества. На их базе построены контрольные карты, заполнение которых позволяет производственнику производить своевременно управляющие воздействия и обеспечивать тем самым поддержание необходимого качества всей продукции.

Пусть в некоторый момент мы хотим выяснить качество изготовляемой продукции. С этой целью произведем замеры определяющего качество параметра нескольких последовательно изготавливаемых изделий. Обозначим результаты этих замеров через x_1, $x_2, \ldots$, x_n. Обычно n выбирают равным 3, 5, 10. Мы дальше станем предполагать, что $n=5$, а результаты замеров независимы и нормально распределены. Начертим теперь оси координат; по оси абсцисс станем отмечать номер серии замеров, а по оси ординат — результаты замеров. Кроме того, начертим в координатной плоскости две прямые $y=a+3\sigma$ и $y=a-3\sigma$. В силу сказанного ранее каждое из наблюдений с подавляющей вероятностью будет находиться в полосе между этими прямыми. Так что мала будет и вероятность выйти за пределы этой полосы хотя бы одному наблюдению. Если все же такое событие произошло, то это будет указывать на неполадки в процессе изготовления (произошло маловероятное событие) и будет настоятельно требовать переналадки оборудования или же изменения условий обработки.

На рисунке 2 указаны результаты пяти выборок, полученные значения обозначены на соответствующей ординате крестиками. В первых четырех выборках все наблюдения остаются в отмеченной полосе и поэтому оператор спокойно продолжает работу, поскольку практически нестандартная продукция не производится. В пятой выборке одно из наблюдений выскочило за пределы контрольной полосы. Это означает, что появилась повышенная вероятность производства дефектной продукции и, следовательно, нужно производить подналадку оборудования. Шестая выборка произведена после подналадки; в ней результаты ложатся вблизи от номинала a.

В действительности по расположению замеров можно делать несравненно более содержательные заключения, которые станут указывать не только факт необходимости подналадки, но и причины разладки. Так, на рисунке 2 легко заметить, что от выборки к выборке наблюденные значения постепенно ползут вверх. Это служит указанием на то, что настройка оборудования изменилась так, что ведущий параметр увеличивает свое значение. Если же значения от выборки к выборке расползаются вверх и вниз, начинают расползаться по всей полосе (рис. 3), то

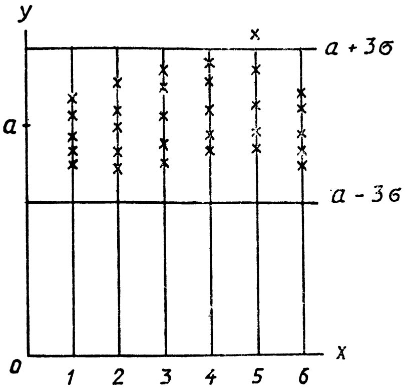


Рис. 2

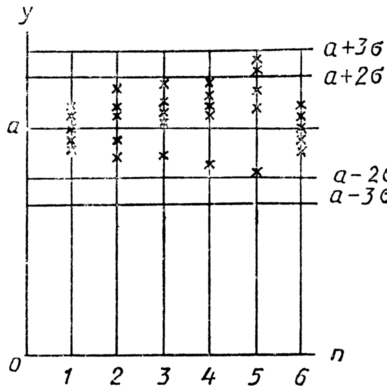


Рис. 3

это служит сигналом о действии причин, вызывающих появление повышенной дисперсии. Такой причиной может быть, например, плохое крепление режущего инструмента. На рисунке 3 приведены результаты пяти выборок. От выборки к выборке замечаются две тенденции: с одной стороны, увеличивается разброс, а с другой стороны, в среднем растут и сами значения параметра. Шестая выборка сделана после подналадки.

Изложенный метод управления носит наименование метода индивидуальных значений. Он прост в использовании и не требует никаких вычислительных процедур. Единственная операция, которая необходима,— нанесение точек на прямые наблюдений.

Только что описанный метод построения контрольных карт может быть усовершенствован вот в каком отношении. В том, что уже было изложено, управляющее воздействие производится лишь тогда, когда хотя бы одно изделие выходит за допустимые границы. Естественно спросить себя: а нельзя ли так организовать контроль качества, чтобы останавливать процесс в момент, когда дефектная продукция еще не производится, но появляется повышенная вероятность возможности ее производства? Это соображение привело к идее введения дополнительных границ, которые естественно назвать предупредительными. Таким образом вся область возможных значений разделяется на три части: область приемлемого качества, область неудовлетворительного качества и предупредительную область, попадание в которую результатов наблюдений является сигналом о возможности изготовления дефектной продукции.

В качестве предупредительных границ выбираются обычно прямые $y=a\pm 2\sigma$. На рисунке 3 указаны все необходимые подразделения области возможных значений на три указанные части. Легко подсчитать, что при пяти наблюдениях вероятность одному наблюдению выйти за пределы двухсигмовой полосы, окружающей точку a, равна 0,1194. Вероятность двум наблюдениям выйти за пределы этой полосы равна 0,0180. Три же наблюдения могут выйти за ее пределы лишь с вероятностью 0,0086. Таким образом за пределы двухсигмовой полосы при нормальном ходе производства по крайней мере одно наблюдение может выйти с вероятностью, равной почти 0,16. Это довольно большая вероятность, и поэтому выбор предупредительной границы так, как это у нас сделано, может приводить к частым необоснованным переналадкам. Быть может, следовало бы в качестве предупредительных границ выбрать прямые $y=a\pm 2{,}5\sigma$.

Мы не станем подробнее излагать контрольные карты с предупредительными границами. Принципы их использования ясны, так же как понятна их большая гибкость по сравнению с ранее изложенными контрольными картами для метода индивидуальных значений.

Заметим, что контрольные карты могут быть использованы и для другой важной цели — анализа хода производственного процесса. Действительно, представим себе, что последовательные выборки проявляют определенную тенденцию: от выборки к выборке растут наблюденные значения параметра: разброс значений параметра и т. д. Мы уже говорили, что такое наблюдение говорит о воздействии какого-то постоянного фактора, который приводит к сдвигу параметра от номинального значения. В первом приведенном случае это может быть затупление резца, уменьшение скорости оборота фрезы. Во втором случае речь может идти о плохом креплении инструмента.

В математической статистике доказан такой фундаментальный факт: в случае нормального распределения среднее арифметическое результатов наблюдений

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

и среднее квадратическое s^2

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$$

содержат равно столько же информации о параметрах распределения, сколько их содержится во всем ряде наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Это означает, что нам совсем не нужно знать сами наблюдения, а достаточно следить за величинами $\bar{x}$ и s^2. Для них также можно построить контрольные карты. Но при этом следует иметь в виду, что дисперсия $\bar{x}$ равна $\frac{\sigma^2}{n}$. Это означает, что для $\bar{x}$ контрольные границы следует брать в виде $y=a\pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Использование контрольных карт для $\bar{x}$ ничем не отличается от того, что было сказано нами ранее для метода индивидуальных значений.

Заметим, что одна контрольная карта для $\bar{x}$ не решает вопроса управления качеством; необходима еще дополнительная карта

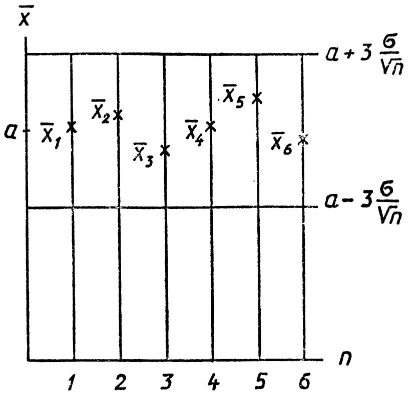


Рис. 4

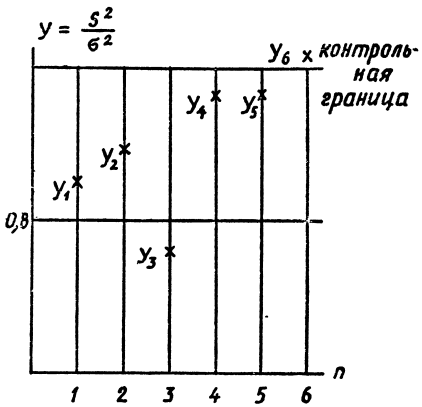


Рис. 5

для s^2. Легко подсчитать, что математическое ожидание отношения $\frac{s^2}{\sigma^2}$ равно не 1, а $1-\frac{1}{n}$. Как говорят, среднее квадратическое s^2 является смещенной статистикой для σ^2. Таким образом, для пяти наблюдений математическое ожидание отношения $\frac{s^2}{\sigma^2}$ равно

$$M\frac{s^2}{\sigma^2}=1-1/5=0{,}8.$$

Отсюда вытекает, что не должно быть тревог, если средние квадратические отклонения будут достаточно систематически меньшими, чем дисперсии. Поскольку распределение $\frac{s^2}{\sigma^2}$ известно при любом n, можно вычислить разумную границу переналадки при ее превышении отношением $\frac{s^2}{\sigma^2}$. На рисунках 4 и 5 даны шесть выборок и значения x_k для каждой из выборок, также как и $\frac{s_k^2}{\sigma^2}$. Мы видим, что поведение $\bar{x}_k$ во всех выборках очень приличное и, если наблюдать только $\bar{x}_k$, то оснований для переналадок оборудования нет. Однако взгляд на контрольную карту для $\frac{s^2}{\sigma^2}$ показывает, что в шестой выборке мы наблюдаем выход за контрольную полосу. Дисперсия в шестой выборке требует переналадки, поскольку, по-видимому, ослабло крепление режущего инструмента. То обстоятельство, что $\frac{s^2}{\sigma^2}$ в третьей выборке оказалось меньшим чем 0,8, не должно приводить к переналадке, поскольку для этой выборки разброс оказался малым, а среднее арифметическое не вышло за контрольные границы.

К сказанному мы должны сделать небольшое замечание:

несмотря на то, что в теоретическом плане рассмотрение непосредственных наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и двух величин $\bar{x}$ и $\frac{s^2}{\sigma^2}$ для оценки нормального распределения эквивалентно, поскольку они оба содержат одну и ту же информацию, в практическом смысле этой равноправности нет. Метод индивидуальных значений проще. Он не требует никаких вычислений и ограничивается одной контрольной картой. Метод же, использующий $\bar{x}$ и $\frac{s^2}{\sigma^2}$, требует довольно значительных вычислений и двух контрольных карт.

Статистическая теория управления качеством или, как говорили раньше, текущего статистического контроля в настоящее время достаточно хорошо разработана и находит широкое применение в промышленности. Углубление этой теории и дальнейшая работа по использованию этой теории на производстве является важным аспектом научно-технического прогресса.

§ 5. Одна транспортная задача

Лет двадцать назад ко мне на кафедру приехал для получения консультации неизвестный мне человек и попросил разъяснить ему ряд недоумений, возникших у него по работе. Он представился как специалист по организации работы грузовых морских портов. Мы познакомились, и с тех пор я поддерживаю добрые деловые отношения с М. Н. Зубковым.

Известно, что морские порты предназначены для того, чтобы принимать прибывающие в них суда и быстро, по возможности без простоев, организовывать их погрузку и разгрузку, иными словами *обработку* судов. Простой судна в порту—это не только задержка с выполнением заданий по перевозке грузов, но и штраф за простой. По словам Зубкова, сутки простоя зафрахтованного за рубежом судна в 5000—6000 тонн водоизмещения обходятся стране в 2500—3000 долларов.

Развитие экономики страны и экономических связей как внутри страны, так и с другими государствами с неизбежностью приводит к росту грузопотоков, увеличению числа судов в распоряжении пароходств и значительному росту интенсивности движения. Но, как оказывается, этот процесс сопровождается резким увеличением простоев судов в ожидании обработки. Как растут простои, Зубков проиллюстрировал следующей небольшой табличкой.

Годы	1960	1963
Грузооборот	100%	125%
Простои судов	100%	392%

Оказывается, за три года грузооборот вырос на одну четверть, а простои судов при этом выросли почти в четыре раза из-за ожидания освобождения причалов.

Зубкова заинтересовал вопрос: как могло случиться, что грузооборот возрос на 25%, а простои судов в ожидании начала обработки выросли почти на 300%? Не является ли это нарушением известных законов арифметики? С этих вопросов и началась наша совместная деятельность по выяснению ответа на задачу большого народнохозяйственного значения.

Удивительно, но каждый раз, когда берешься за решение действительно важной прикладной задачи, с ее различными постановками начинаешь сталкиваться повсюду—в газетах, журналах широкого назначения, в устных беседах. Так произошло и в данном случае. В газете «Правда» была опубликована большая статья капитана крупнейшего в ту пору нашего танкера «Пекин» как раз на эту тему. Он привел слова одного из начальников черноморских портов, заявившего, что были случаи, когда танкеры иностранных компаний уходили от нас с грузом жидкого топлива и этот груз они увозили в счет простоев их судов. В газете «Водный транспорт» начальник службы движения Министерства морского флота писал о том, что простои судов в портах в ожидании начала обработки за последние годы выросли настолько, что в сумме как бы суда целого пароходства поставлены на постоянный прикол. Указанные статьи и приведенные в них факты создавали более полное представление о значимости задачи.

Чтобы быстрее и полнее войти в проблематику, я попросил Зубкова снабдить меня следующими материалами: 1) методикой расчета пропускной способности портов, 2) данными о моментах прибытия судов в порты, 3) данными о длительности обработки судов. Очень быстро — всего через день, два — я получил методики расчетов пропускной способности портов. Их содержание заслуживает пристального внимания, поскольку именно в них изложены принципы, на базе которых они построены. Воспроизведем рассуждения, которые там использованы для получения окончательной расчетной формулы.

Пусть плановое задание по обработке грузов в порту на год равняется P тонн, средний тоннаж судов, принимаемых портом, равен p тонн. Тогда в течение года порт должен принять в среднем $\frac{P}{p}$ судов. Если на обработку одного судна в среднем затрачивается a суток, то на выполнение плана порт затратит $\frac{Pa}{p}$ суток. Наконец, пусть порт находится в условиях, когда пригодных для работ в порту дней в году в среднем будет k, а остальные дни для погрузо-разгрузочных работ непригодны из-за штормовых ветров, ливневых дождей, ледостава и пр. Тогда ясно, что порт ежедневно должен принимать по $\frac{Pa}{pk}$ судов, чтобы справиться с планом. Таким образом для выполнения плана в порту должно быть $n = \frac{Pa}{pk}$ причалов.

Рассмотрим пример. Пусть $P = 2\,000\,000$ т, $p = 5000$ т, $a = 5$ сут, $k = 250$. Тогда, согласно выведенной формуле, для обеспечения выполнения плана обработки судов в порту необходимо и достаточно иметь 8 причалов.

По поводу проведенного рассуждения мы должны сделать два замечания, относящиеся к явно невысказанным предпосылкам, на которых зиждется все рассуждение, кстати сказать, весьма распространенное. Эти замечания таковы.

1) В рассуждении предполагается, что в порту судно или полностью разгружается, или полностью загружается. Игнорируется тот часто распространенный случай, когда судно доставляет в порт лишь незначительную часть груза, а остальной предназначается для других портов, или же принимает на борт несколько контейнеров, ящиков, или же попросту продовольствие и воду для команды. Такое положение вещей является скорее правилом, чем исключением, а его возможность в рассуждении игнорируется.

2) Рассуждение неявно исходит из предпосылки, что все причалы работают с полной нагрузкой, поскольку иначе будет нарушен баланс времени. А это означает, что после окончания обработки судна к причалу немедленно должно пришвартовываться очередное судно для начала обработки.

Чтобы причал работал без перерывов, должно быть одно из двух:

а) или расписание прибытия судов составлено идеально и в момент окончания погрузки или выгрузки в порт входит очередное судно,

б) или в порту имеется постоянная очередь судов на обработку.

Что имеет место в действительности — позволяют решить сведения о фактическом прибытии судов в порты назначения, а также о длительности операции по их обработке. Частично эти сведения удалось извлечь из так называемых «графиков движения судов», которые составляются специалистами министерства на каждый месяц. Зубков доставил мне килограммов 50—60 этих графиков, зафиксированных на листах большого размера и содержащих около двадцати граф, включающих данные о наименовании судна, характере и количестве грузов, предполагаемом сроке прибытия, фактическом дне прибытия в порт назначения. К сожалению, в этих графиках движения не было необходимых мне данных: а) о моменте прибытия судна в порт, б) длительности пребывания у причала для выполнения погрузо-разгрузочных работ. Прибытие в порт назначения планируется указанием не момента прибытия, а интервала времени, порой доходящего до 15—16 дней. Сравнение же плановых данных с фактическим прибытием судов показало, что в планируемый отрезок времени прибывает всего лишь 40—50% планируемых судов, а в планируемый месяц (хотя бы с грубым нарушением сроков прибытия) — лишь 60—70%. Но в тот же месяц прибывают суда, которые не планировались прибытием. Таким образом, идеального прибытия судов нет, и следует сделать тот вывод, что предположение «а)» не выполняется. Значит, фактически должно наблюдаться состояние, описанное пунктом «б)». Мы вынуждены сделать следующее заключение: предлагаемая система расчета пропускной способности портов и необходимого числа причалов неизбежно должна приводить к образованию очередей судов на обработку.

Этот вывод подкрепляется еще одним соображением, которое неизбежно вытекало из статистических материалов, собранных по нашим указаниям в разных портах Советского Союза. Эти данные касались длительности обработки судов. Оказалось, что эта длительность не остается постоянной, а меняется в зависимости от ряда обстоятельств — характера грузов и их упаковки, грузоподъемности судна, его конструкции и пр. Были случаи, когда в один и тот же порт в течение сбора материалов по нескольку раз заходило то же самое судно с различными грузами и для разных целей. Период его обработки при этом менялся от 1,5—2 ч до 16 сут. Мы ограничились в своих наблюдениях лишь так называемыми генеральными грузами и отказались от изучения наливных и насыпных грузов. Для них обычно выделяются специальные причалы, оборудованные особой погрузо-разгрузочной техникой. Нам удалось подметить закономерности, характерные для длительности погрузо-разгрузочных операций, но это были *закономерности случайных явлений*. Об этом мы будем говорить позднее.

Нами были собраны и изучены статистические данные по прибытию судов дальнего плавания в порты назначения. Эти данные были нами собраны в портах Дальнего Востока, Черного, Балтийского и северных морей. Для всех портов Союза, кроме одного — Ленинградского, оказалось, что с большой точностью выполняется одна и та же общая закономерность, которая формулируется в терминах теории вероятностей: вероятность того, что за период t в порт прибудет k судов ($k=0, 1, 2, 3...$) вычисляется по формуле

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \qquad (1)$$

$\lambda>0$ — постоянное.

Сравнение вычислений по этой формуле с фактическим прибытием судов оказалось настолько хорошим, что мы решились на своеобразный прогноз: узнав необходимые исходные данные по ряду портов, мы послали начальникам этих портов сведения о том, сколько дней в установленные сроки им придется принимать в сутки по 0, 1, 2, .., 7, 8 судов. Я вспоминаю ответную открытку одного из наших корреспондентов. Ее содержание было примерно следующим: «Я в течение 23 последних лет руковожу работой нашего порта и не могу предсказать, что́ случится не только через месяц, а даже завтра. Вы же, даже не побывав у нас, имеете смелость предсказывать вперед на месяц и даже на два. До сих пор я с уважением относился к нашей советской математической науке, теперь же мне придется пересмотреть мой взгляд на нее». Нельзя сказать, что содержание открытки меня очень обрадовало и окрылило. Но с каким же удовлетворением месяца через три мы получили оттуда письмо, в котором содержались лишь следующие слова: «Ваши предсказания осуществились идеально. Откуда же вы узнали, что у нас случится?». Ответ один — из математической теории явления.

Кстати, исключение с Ленинградским портом нас убедило в правильности наших теоретических предпосылок, поскольку в него суда прибывают не непосредственно, а лишь после сформирования каравана, который по судоходному каналу проводит лоцман. Из-за этого обстоятельства можно было предвидеть нарушение общей закономерности для такого рода портов.

Приведенная здесь формула для вероятности появления в порту за время t данного числа k судов была получена за несколько лет до описываемых событий А. Я. Хинчиным. Он интересовался вопросами телефонной связи, в частности его интересовала задача об определении вероятности того, что за промежуток времени t на станцию поступят k вызовов от абонентов. В предположении, что абонентов много, они производят вызовы независимо друг от друга и что нет абонентов, которые берут на себя львиную долю вызовов, оказалось, что приведенная нами формула является асимптотической для искомой вероятности. С судами дальнего плавания происходит подобный же процесс: в данный порт поступают суда из многих портов мира, эти суда отправляются из разных портов независимо одно от другого и, наконец, суда сравнительно равномерно поступают из разных портов (во всяком случае, один порт не отправляет 30 или 10% всех судов, поступающих в интересующий нас порт). Таким образом, в этом пункте мы не строили новую математическую теорию, а воспользовались уже имевшимся общим результатом и лишь провели статистическую проверку пригодности ранее изученной модели.

Перейдем теперь снова к основной задаче. С этой целью введем в рассмотрение вероятности $\pi_k(t)$ того, что в момент t в порту будет k судов. Если порт имеет n причалов и все причалы доступны для судов, то при $k \leqslant n$ все суда будут находиться под погрузкой или разгрузкой, а при $k > n$ все n причалов будут заняты и еще $k-n$ судов будут ожидать освобождения причалов. Длительность обработки судна η мы станем считать случайной величиной, что хорошо согласуется с наблюдениями. Далее мы станем исходить из следующих предпосылок, которые и составят математическую модель нашего явления.

1. Прибытие судов в порт подчинено пуассоновскому процессу, определяемому формулой (1).

2. Если имеется свободный причал и нет очереди, то вновь прибывающее судно немедленно занимает место у свободного причала и начинается его обработка. Если же имеется очередь судов, то первый освободившийся причал сразу принимает первое по очереди судно и без промедлений приступает к его обработке.

3. Длительность обработки судна η является случайной величиной с функцией распределения, равной

$$P\{\eta < t\} = 1 - e^{-\nu t},$$

где ν — положительная постоянная.

4. Каждое судно, находящееся в очереди, дожидается обслуживания, и обработка проводится в необходимом объеме.

При этих условиях удается составить систему дифференциальных уравнений, из которых могут быть найдены вероятности $\pi_k(t)$. Ограничусь тем, что приведу эту систему и не стану заниматься выводом. Вот эта система:

$$\pi_0'(t) = -\lambda\pi_0(t) + \nu\pi_1(t);$$

при $1 \leqslant k < n$

$$\pi_k'(t) = -(\lambda + k\nu)\,\pi_k(t) + \lambda\pi_{k-1}(t) + (k+1)\,\nu\pi_{k+1}(t);$$

при $k \geqslant n$

$$\pi_k'(t) = -(\lambda + n\lambda)\,\pi_k(t) + \lambda\pi_{k-1}(t) + n\nu\pi_{k+1}(t).$$

Кроме того, при всех положительных t

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(t) = 1. \tag{2}$$

Для того чтобы эта система могла быть решена, нужно указать начальные условия, например, что в начальный момент при $t=0$ вероятность $\pi_k(0)=0$, а $\pi_0(t)=1$.

Однако мы не станем решать систему дифференциальных уравнений, поскольку для практических целей нас интересует установившееся решение, т. е. решение для больших значений t. С этой целью мы введем обозначения

$$p_k = \lim_{t\to\infty} \pi_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

и станем в дальнейшем изучать именно эти величины.

Величины p_k — стационарные вероятности — удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$-\lambda p_0 + \nu p_1 = 0;$$

при $1 \leqslant k < n$

$$\lambda p_{k-1}-(\lambda+k\nu)p_k+(k+1)\nu p_{k+1}=0;$$

и при $k\geqslant n$

$$\lambda p_{k-1}-(\lambda+n\nu)p_k+n\nu p_{k+1}=0.$$

Из этих уравнений легко находим, что при $k\leqslant n$

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0\ \left(\rho=\frac{\lambda}{\nu}\right),$$

а при $k\geqslant n$

$$p_k=\frac{\rho^k}{n!n^{k-n}}p_0.$$

Для определения p_0 воспользуемся равенством (2). В результате

$$p_0\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{n^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k\right]=1.$$

Так как бесконечная сумма, стоящая в квадратных скобках, сходится только при условии $\rho<n$, то при этом предположении находим

$$p_0^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}.$$

Если же $\rho\geqslant n$, то ряд в квадратных скобках расходится и, значит, p_0 должно быть равным 0. Но при этом оказывается, что и при любом $k\geqslant 0$ должно быть $p_k=0$. Этот результат очень важен, поскольку он показывает, что если $\rho\geqslant n$, то очередь на обслуживание неограниченно возрастает со временем.

В нашей задаче сами вероятности p_k нас интересуют лишь как вспомогательные величины. Основное значение для нас имеет длительность ожидания γ начала обслуживания. Эта величина случайна, она может принимать любые значения от 0 до ∞. Чтобы полностью ее охарактеризовать, необходимо найти ее функцию распределения, т. е. функцию $P\{\gamma<t\}$ (вероятность того, что γ примет значение, меньшее чем t). Несложными рассуждениями можно показать, что при $t>0$

$$P\{\gamma<t\}=1-\pi_n e^{-(n\nu-\lambda)t},$$

где $\pi_n=\sum_{k=n}^{\infty}p_k$, т. е. вероятность того, что все приборы системы (в нашем случае все причалы порта) будут заняты.

Поскольку γ не может принимать отрицательных значений, при $t\leqslant 0$ имеет место равенство $P\{\gamma<t\}=0$. При $t=0$ функция распределения $P\{\gamma<t\}$ имеет скачок, равный $1-\pi_n$. Это означает, что с вероятностью $1-\pi_n$ величина γ может принять значение 0.

Иными словами, судно, пришедшее в порт, может с вероятностью $1-\pi_n$ приступить к обработке без ожидания. Для этого результата нам, собственно, и не нужно было строить теорию, поскольку очевидно, что если имеется хотя бы один свободный причал, то вновь прибывшее судно занимает его, без того чтобы предварительно постоять в очереди.

Для практики особое значение имеет среднее значение γ, т. е. математическое ожидание длительности ожидания. Эта величина равна

$$a=M\gamma=\int_0^\infty t dP\{\gamma<t\}=\frac{\pi_n}{\nu(n-\rho)}.$$

Обратим внимание на то, что величина a возрастает очень быстро по мере приближения ρ к n. Это обстоятельство объясняет удивившее М. Н. Зубкова явление чрезвычайно быстрого возрастания простоя судов при сравнительно небольшом увеличении грузоперевозок. Чтобы нагляднее представить себе быстроту нарастания средней длительности ожидания, мы приведем небольшую табличку, в которой станем вычислять не величину a, а λa. Поскольку λ постоянно, это не имеет значения для характеристики быстроты возрастания. Мы полагаем $n=2$.

ρ	0,1	0,2	1,0	1,2	1,5	1,6	1,8	1,9
λa	0,0003	0,0020	0,3333	0,6750	1,3500	2,8444	7,5872	17,5872

Приведенные нами формулы могут быть использованы для решения многочисленных задач, возникающих в практических ситуациях. Рассмотрим одну из них. Предположим, что нам необходимо решить такой вопрос. Выделены деньги на строительство портового хозяйства. Поступили три предложения: 1) строить два порта и в каждом из них строить по одному причалу; 2) построить один порт с двумя причалами, доступными для всех прибывающих судов; 3) построить один порт с одним причалом, но на этом причале сосредоточить все погрузо-разгрузочные средства. В последующей таблице указаны длительности ожидания в каждом из трех вариантов при различных загрузках ρ.

ρ	0,1	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
I	0,0222	1,0000	1,8000	3,2660	6,4000	16,2000
II	0,0020	0,3333	0,6750	1,3451	2,8444	7,6737
III	0,0111	0,5000	0,9000	1,6330	3,2000	8,1000

Как мы знаем, простои обходятся весьма дорого стране, и поэтому следует выбрать тот проект, который приведет к наименьшим затратам. В нашем случае это второй проект. При больших загрузках ρ от него не очень сильно отличается третий проект. Если учесть затраты на строительство причалов, то может оказаться, что третий проект следует предпочесть (конечно, без учета развития перевозок).

Для завершения рассказа нам остается совсем немногое: выяснить смысл постоянных λ и ν и указать, как могут быть использованы наши результаты для вычисления оптимального числа причалов в порту для выполнения плана.

Легко подсчитать, что λ является не чем иным, как средним значением (математическим ожиданием) числа судов, прибывающих в порт за единицу времени. Если мы за единицу времени принимаем сутки, то λ есть среднее число судов, прибывающих за сутки. Как показывает подсчет, ν^{-1} равно среднему значению длительности обработки судна, а значит ν есть среднее число обработок судов одним причалом за единицу времени при непрерывной работе причала.

Нет нужды пояснять, что содержание каждого причала обходится в единицу времени в некоторую сумму c и значит на содержание n причалов приходится в единицу времени затрачивать сумму nc. Точно так же за простой судна в течение единицы времени нужно платить сумму C. Но простой судов увеличивается с уменьшением числа причалов. Суммарные расходы порта на содержание порта и оплату простоев судов складываются из двух только что упомянутых величин. Одна из них убывает по мере возрастания причалов, другая же при этом возрастает. Стало быть, имеется такое число причалов, при котором достигается минимум. Это число, очевидно, и нужно принять за оптимальное число причалов в порту для выполнения плана.

§ 6. Сельское хозяйство и математика

Задачи снабжения населения продовольствием, а промышленности сырьем в необходимом ассортименте и надлежащего качества всегда стояли, стоят и будут стоять перед человечеством. Их решение осложняется в связи с непрерывным ростом населения и одновременным отторжением пахотных земель для строительства промышленных предприятий и городов и видоизменяется, поскольку потребности населения и промышленности расширяются. Вот почему решение проблем, связанных с сельским хозяйством, вызывает интерес и заботы правительства и партии, результатом чего явилась «Продовольственная программа». Ее осуществление является всенародным делом и поэтому не может быть специалиста, который мог бы остаться равнодушным к выдвинутым ею вопросам и не продумал бы своего места и личного вклада в их разрешение. Это заключение относится в равной мере и к математикам.

Разумеется, роль преподавателя в этом деле, как, впрочем, и во всех иных всенародных делах, очень велика. Ведь преподаватель, как мы это неоднократно отмечали, не только учит своему предмету, но и воспитывает отношение к делу, любовь и уважение к труду, стремление выполнить порученное дело наилучшим образом. Сейчас весьма важно, чтобы преподаватель нашел возможности показа учащимся необходимости участия представителей всех дисциплин в решении задач Продовольственной программы и привил им чувство глубокого уважения к нелегкому труду сельских тружеников.

Нам важно воспитать у каждого школьника чувство личной ответственности за оказание систематической помощи старшим. К сожалению, у нас нередко ошибочно понимается забота о детях: часто считают, что для детей нужно делать все, а они не должны делать ничего для страны и для семьи (кроме учебы). Правы те, кто считает это основой возникновения детского эгоизма, перерастающего затем в тунеядство и стремление прожить за счет чужого труда. В связи со сказанным, я считаю весьма полезным организацию летнего семестра для старших школьников, когда они направляются на работу в сельское хозяйство. Только при этом должно соблюдаться требовательное отношение к количеству и качеству труда школьника.

Я принадлежу к поколению, которое воспитывалось в обстановке пусть несложного, но систематического обязательного физического труда в семье. Мы помогали родителям по дому уже с пятилетнего возраста: приносили дрова для топки печей, затем пилили и рубили дрова, выполняли подсобные работы в огороде и поле, пасли лошадей в ночном. Это было интересно и одновременно наполняло нас гордостью, так как наш труд вливался в общее дело. Мы привыкали следить за тем, чтобы не пропадали не только куски хлеба, но даже крошки. Теперь же в траве, на асфальте, в мусорных ящиках можно встретить не только надкусанные ломти хлеба, но даже целые батоны, выброшенные за ненадобностью. Но как может случиться, что хлеб оказывается ненужным? Как можно выбрасывать результат упорного труда пахаря, жнеца, шофера, пекаря и продавца? В семье, детском саду, школе, в пионерской и комсомольской организациях мы должны настойчиво и терпеливо внушать мысль о преступности такого беззаботного отношения к хлебу и вообще к пищевым продуктам.

Сельское хозяйство нуждается в труде механизаторов, изобретателей, рационализаторов; работа в сельском хозяйстве требует постоянного внимания и творческого отношения. Для энергичной натуры здесь широкое поле деятельности. Молодежь должна понять, что труд в сельском хозяйстве столь же почетен, как и труд на заводе, стройке или в лаборатории. Необходимо прививать молодым людям уважение к труду сельского труженика и любовь к необъятным нашим сельским просторам.

В настоящем параграфе затрагиваются лишь некоторые аспекты современных проблем, стоящих перед сельским хозяйством, на которые следует взглянуть глазами математика — педагога и исследователя. В решении проблем, связанных с выполнением Продовольственной программы, на первый план выдвигаются воспитательный и социальный моменты, в том числе отношение к выполнению своих обязанностей работников всех рангов, ликвидация имеющегося у нас благодушия, равнодушия и преступного безразличия к результатам труда. На долю преподавателя математики также остается достаточно дела.

Вопросы селекции. Хорошо известно, что при выведении новых сортов растений или же новых пород скота возникают многочисленные естественные и принципиально важные задачи: как на основании опытных данных выяснить, обладает ли новый сорт (новая порода) необходимыми свойствами? является ли новый сорт более урожайным, чем имевшиеся раньше? можно ли считать, что новый сорт устойчив к изменению погодных условий или к тем или иным заболеваниям? как много наблюдений нужно провести, чтобы с достаточной уверенностью дать ответ на интересующие нас вопросы? как следует планировать и организовывать экспериментальные наблюдения?

Число таких вопросов можно увеличить буквально неограниченно. Ответы на них осложняются тем, что условия, в которых собираются исходные данные, весьма изменчивы. Одних качественных соображений для обоснованных заключений здесь недостаточно, нужны специальные знания, которые излагаются в курсах математической статистики. Собственно говоря, подавляющее число задач математической статистики и методы их решения возникли в опытном деле, связанном с сельским хозяйством.

Проблемам селекции Продовольственная программа уделяет специальное внимание. В ее разделе IX, посвященном внешнеэкономическим связям с социалистическими странами, сказано: «Развивать научно-техническое сотрудничество в области выведения и внедрения в производство новых высокопродуктивных сортов и гибридов сельскохозяйственных культур, выращивания семян и посадочного материала, создания новых линий и пород скота и птицы, использования генофондов растений и животных».

В нашей стране были в прошлом и имеются в настоящее время замечательные селекционеры, на счету у которых большое число выведенных сортов, завоевавших всемирную известность по своей продуктивности, высокому содержанию белка в зерне, хлебопекарным качествам. Они высеваются на огромных площадях не только в нашей стране, но и за ее пределами, в том числе в братских Болгарии и Чехословакии. Сорта пшеницы, возделываемые в США и Канаде, также созданы на базе твердых пшениц «безостая I» и «белотурка», выведенных русскими селекционерами.

Пусть желательно вывести сорт сельскохозяйственной культуры, обладающий повышенной урожайностью. Длительная работа по отбору перспективных растений и семян должна завершиться убедительным доказательством того, что действительно выведен новый сорт и необходимые свойства передаются по наследству. А ведь от растения к растению и даже более — от зерна к зерну в одном колосе — меняются свойства, которые нас интересуют. Это связано со многими обстоятельствами и, в частности, с локальными особенностями почвы, глубины залегания семян в земле, с поступлением влаги к корням растений и вместе с ней — питательных веществ, с наличием вблизи необходимых удобрений, восприятием растением солнечной энергии. Этот разброс очень велик; тщательные наблюдения показывают, что высаженные зерна, казалось бы одного сорта в одинаковых условиях, приводят к большой дисперсии числа и массы зерен в колосе.

Для различных колосьев отношение массы содержащихся в них зерен может достигать величины 10—11. Таким образом, для отдельных растений нового сорта урожайность может оказаться меньшей, чем для некоторых растений старых сортов. Приходится делать заключения при наличии случайного разброса свойства, интересующего исследователей, от растения к растению. При этом сравнение следует производить так, чтобы условия произрастания старых и нового сортов были примерно одинаковы и сорта не смешивались друг с другом. Далее нужно изучить влияние почвенных и климатических условий на урожайность сорта. Для этих целей математическая статистика предлагает своеобразные методы, которые широко используются селекционерами.

Конечно, чтобы выводить новые сорта, селекционер должен быть в первую очередь биологом и прекрасно знать свое дело. Но когда речь идет о планировании эксперимента, отборе статистического материала и его последующей обработке, то здесь первое место принадлежит математику, специалисту в области математической статистики. Без привлечения методов математической статистики нет возможности дать объективные заключения о ценности выведенного сорта. Игнорирование ее методов отбросит исследователей на уровень чисто качественных заключений типа «я так считаю», «я надеюсь», «мы предполагаем».

Возможные потери при посеве. Можно иметь превосходный посадочный материал, выведенный лучшими селекционерами, но если вовремя не подготовить поле, своевременно не провести посев, то не будет и полноценного урожая. Эта истина хорошо известна каждому агроному, каждому сельскому труженику. Далее, нужно, чтобы семена были свободны от повреждений, поскольку поврежденное зерно зачастую совсем не дает всходов, а если всходы и появляются, то растение, как правило, оказывается хилым и приносит щуплое зерно, мало пригодное для потребительских целей и совсем не пригодное на посев. Наличие нескольких (3—5) процентов поврежденных зерен в посевном материале приводит к потере урожая на 2—3 ц с гектара. При этом мы не считаем потерь высеянных неполноценных зерен, которые можно было бы использовать на корм скоту. Такие поврежденные высеянные зерна нужно считать попросту выкинутыми на ветер.

Как велики подобные потери, позволяет судить следующая цитата: «Подсчеты показывают, что ежегодно по причине высева посевного материала с определенным содержанием микроповрежденных семян страна недобирает озимой ржи 27 млн. ц зерна (на 9 млн. га), озимой пшеницы 24 млн. ц (на 17,3 млн. га) и яровой пшеницы 76 млн. ц (на 32,3 млн. га), т. е. по этим трем основным зерновым культурам недобор урожая составляет 127 млн. ц, или 12,7 млн. т, общей стоимостью приблизительно 1016 млн. р. Образно говоря, такая величина недобора урожая почти достигает валового сбора ржи в целом по стране (13,6 млн. т)»*).

Можно резко снизить эти потери и тем самым значительно повысить сбор зерна без вложения дополнительных средств и проведения агротехнических мероприятий только за счет тщательного и своевременного регулирования молотильных агрегатов комбайнов, которое обеспечивало бы обмолот практически без повреждения зерна. Интересный пример этого рода приведен в уже цитированной книге А. Н. Пугачева. Это убедительный «пример экономической эффективности от уменьшения поврежденного зерна только в посевном материале в одном хозяйстве нечерноземной зоны. Здесь 1000 га посевных площадей озимых. Норма высева в среднем 3 ц/га (с учетом посевной годности), т. е. нужно высеять 300 т семян. Но, уменьшив количество поврежденного зерна на 20%, при уборке семенных участков получили семена высокой всхожести, что позволило уменьшить норму высева на 40 кг, т. е. до 2,6 ц/га. Стоимость 1 т посевного материала 300 р. Следовательно, хозяйство должно было израсходовать на посевной материал 90 тыс. р., а затратило лишь 78 тыс. р. К тому же урожай оказался выше — не 20 ц/га, а 21 ц/га, что дало реальную прибавку валового сбора зерна со всей площади 100 т, или 13 тыс. р. Общая сумма денежной прибыли хозяйства от уменьшения поврежденного зерна составила 25 тыс. р.».

На базе подобных примеров можно составить большое число арифметических задач, которые привьют учащимся вкус к вопросам сельскохозяйственной экономики и покажут возможности даже начал математики для совершенствования хозяйственной деятельности в колхозах и совхозах.

Насколько халатно относятся некоторые комбайнеры к регулированию молотильного агрегата, показывает следующая таблица:

---

*) Пугачев А. Н. «Потерям зерна — надежный заслон». 2-е изд. М., «Колос», 1981, с. 146.

Количество битого и раздавленного зерна в партии в %	Озимая рожь	Озимая пшеница	Яровая пшеница	Ячмень
0,0—1,0	15,9	23,9	30,7	44,6
1,0—2,0	18,3	43,9	19,8	40,2
2,0—3,0	19,3	18,2	19,5	7,8
3,0—4,0	16,2	6,4	5,3	2,9
4,0—5,0	12,5	1,8	3,5	1,0
5,0—6,0	14,9	4,6	15,7	2,9
10 и больше	2,9	1,2	5,5	0,6

(Таблица заимствована из той же книги А. Н. Пугачева (с. 153)). В ней даны результаты обследования партий по количеству битого и раздавленного зерна, поступавшего на хлебоприемные пункты.

Для статистической обработки эти данные собраны недостаточно хорошо, и поэтому по ним трудно делать обоснованные выводы. В частности, не указано, берутся ли партии одинакового объема или же допускаются и разных (например, под партией понимается грузовик, а его грузоподъемность может быть 3, 5, 8, 16 т и больше). В результате нет возможности подсчитать общий объем поврежденного зерна по стране. Тем не менее даже столь несовершенный статистический материал позволяет заключить, что с обмолотом хлеба дело обстоит далеко не так благополучно, как хотелось бы. Ведь по яровой пшенице имеется более 20% партий, в которых содержится минимум 5% битого и раздавленного зерна. В чем здесь причина? Возможно, что это связано с низкой квалификацией комбайнеров, а может быть, здесь повинны конструктивные недостатки молотильных агрегатов комбайнов. Ответ можно получить, лишь продолжив исследования. В совместном труде специалистов сельского хозяйства и математиков удастся внести предложения, крайне полезные для жизни страны, для решения одного из вопросов, поставленных Продовольственной программой. Следует заметить, что эту работу вполне могут осилить преподаватели школ с привлечением учащихся.

П о т е р и з е р н а п р и у б о р к е. Проблема борьбы с потерями при уборке урожая исключительно актуальна при тех огромных площадях обрабатываемых земель, которые имеются в распоряжении нашей страны. Источники потерь исключительно разнообразны, и каждый из них требует к себе специфического подхода. Прежде всего нужно заметить, что каждый день опоздания с уборкой хлеба грозит весьма серьезными потерями. Оказывается, что «после достижения полной спелости урожай зерна на корню остается практически без изменения в течение 3—5 дней. В дальнейшем с каждым днем теряется около 1% зерна и более, снижаются его всхожесть и хлебопекарные качества»*).

*) Ж у к о в В. Я., К о м а р о в а В. К. «Борьба с потерями на уборке урожая».

Опоздание с уборкой зерновых на 3—4 дня может грозить не килограммами, а центнерами потерь полноценного зерна из-за его осыпания на землю. Именно поэтому так важно произвести уборку в сжатые сроки и начинать ее еще до полной зрелости зерна. Можно, конечно, идти и по другому пути — ускорять движение комбайна. Но это приводит к другим источникам потерь. Подобные же соображения можно высказать и относительно уборки других культур — картофеля, корнеплодов, хлопка, овощей, фруктов и пр. При уборке корнеплодов обязательно следует учитывать возможность наступления ранних заморозков, которые способны погубить то, что не успели убрать и вывезти с поля. Вот почему так важна работа по конструированию новых, более совершенных машин для уборки картофеля, моркови, помидоров, фруктов. Ручной труд на их уборке недостаточно производителен, и общество не может мириться со сложившимся положением: потребность в продуктах сельского хозяйства непрерывно возрастает, а традиционные формы труда не обеспечивают своевременной уборки уже выращенного урожая. Здесь механизация и разумная автоматизация нужны как воздух, без них уже не обойтись.

Вопросы предупреждения потерь зерна при уборке представляют важную и трудную задачу. Для ее решения разработаны достаточно эффективные меры, однако потери все еще имеются, и достаточно серьезные. На этот аспект Продовольственной программы следует обратить самое пристальное внимание, поскольку потери на каждом из этапов — уборка, транспортировка, хранение — достигают порой внушительных размеров. И это касается не только зерна, но овощей и фруктов в еще большей степени.

Анализ причин потери зерна приводит к необходимости наблюдений и последующей статистической обработки полученных данных. Оказывается, что этих причин несколько и основные из них таковы:

1) режущий аппарат комбайна устанавливается слишком высоко и некоторые растения проходят под ним без среза;

2) часть растений наклоняется и проходит под ножом комбайна;

3) не удается подобрать все полеглые растения;

4) из-за повышенной скорости комбайна зерно из колоса не успевает вымолотиться, а зерно, попавшее в солому, не успевает вытрястись в бункер;

5) часть зерна выходит с соломой и половой;

6) при плохой отладке молотильного аппарата часть зерна дробится и выбрасывается с половой на землю;

7) часть зерен при ударе получает микроповреждения и надломы, в результате чего оно теряет всхожесть при посеве, подвергается опасности быть съеденным вредителями и теряет хлебопекарные свойства.

Для изучения всех этих возможностей потерь необходим сбор массовых статистических сведений для разного типа почв, различных климатических зон, различных типов комбайнов. После анализа всех этих данных можно вносить аргументированные предложения по борьбе с различными возможностями потерь при уборке.

Для исследования влияния первой из указанных причин по моей просьбе сотрудники Кировоградского института механизации сельского хозяйства собрали данные следующего характера: на поле, засеянном пшеницей сорта «мироновская», были срезаны с участка площадью 2 м^2 все растения и замерены: а) рост стебля, б) длина колоса, в) число зерен в колосе, г) масса зерен в колосе.

Смысл сбора и обработки таких данных состоит в следующем: выяснив эмпирическое распределение роста растений, можно ориентировочно оценить минимальную потерю урожая при установке ножа комбайна на заданной высоте. Это будет минимальная оценка, поскольку при движении комбайна может быть пригибание более высоких растений. Для указанной задачи очень важны также корреляционные связи между ростом растений и массой зерна в колосе.

Ясно, что статистические данные будут меняться от поля к полю, от сорта к сорту и от года к году. Поэтому необходима такого рода работа не единичная, а массовая. Возможно, нужно будет переконструировать комбайн на самонаводящуюся установку высоты режущего инструмента.

Мы сейчас выскажем две гипотезы, которые в известной мере противоположны: 1) растения с коротким стеблем более урожайны, поскольку все жизненные силы у них направлены на формирование колоса, а не стебля; 2) высокий стебель является свидетельством того, что растение обладает мощной корневой системой, вбирающей в себя большое количество питательных веществ, в результате чего формируется и полновесный колос.

В полной мере эти гипотезы проверить не удалось, поскольку статистические данные были собраны с некоторым нарушением правил. Кроме того, хотя были замерены более 1200 растений, все же это наблюдение следует считать единичным — один сорт, одни условия почвенные, климатические. Однако, несмотря на некоторую неполноценность проанализированных данных; удалось получить такие предварительные выводы: а) колос на коротком стебле в среднем полновеснее, чем на длинном; б) разброс веса зерен в колосе значительно больше на растениях с высоким стеблем, чем на растениях с коротким. Конечно, эти выводы пока еще не могут считаться окончательными, но они заслуживают дальнейшей проверки. Вдобавок не выяснены обстоятельства появления короткостебельных растений. Росли ли они равномерно по всему участку или были сосредоточены, например, у обочины дороги, или же их посеяли на недостаточную глубину?

Мы уже говорили, что потери при уборке далеко не ограничиваются тем, что часть растений остается несжатой. Значительные источники потерь таятся в выборе повышенных скоростей движения комбайнов. Особенно это существенно при хорошем урожае. Ведь в этом случае при большой скорости движения в молотильное отделение поступает огромное количество срезанных растений и они быстро выталкиваются, не успев обмолотиться, а из соломы зерно не успевает высыпаться. В результате часть зерен остается в колосе, часть в соломе и полове и вместе с ними выбрасывается на землю. Можно высказать априорное суждение, что потери при повышенных скоростях будут расти не пропорционально увеличению скорости, а быстрее. И если при урожайности в 15 ц/га комбайн успевает при некоторой скорости v_0 вымолотить и засыпать в бункер практически все зерно, то при увеличении скорости всего на километр в час потери будут уже весьма ощутимыми. Если же урожай достигает 60—70 ц/га, что в хороших хозяйствах Кубани и Украины не редкость, то при той же скорости потери урожая будут очень значительны. Как мне рассказывали опытные комбайнеры, при такой урожайности даже при не очень больших скоростях потери могут достигать каждого третьего выращенного зерна.

Исследования, проведенные в этом направлении, дали возможность рекомендовать оптимальные скорости движения комбайна при заданной урожайности и заданном отношении массы зерна к массе соломы. При прямом комбайнировании оказалось, что при урожае 15 ц/га комбайну СК-5 «Нива» можно развивать скорость в 8—8,5 км/ч, а при том же соотношении между массой зерна и соломы, но при урожае в 45 ц/га скорость комбайна следует уменьшить до 5 км/ч.

Исследование проблем, о которых идет речь, связано со сбором статистических данных и последующей их обработкой. Несмотря на то что в этом направлении многое уже сделано, еще осталось немало вопросов, которые ожидают своего решения. Не следует забывать, что когда речь идет о разыскании оптимальных решений, найти их без использования математических средств невозможно.

Множество проблем, скорее хозяйственных и организационных, возникает при борьбе с потерями при перевозке зерна. Это особые проблемы, которые могут привлечь внимание математиков и при решении которых нужно пользоваться математическими методами.

Линейное программирование. Несомненно, что экономические аспекты в сельском хозяйстве крайне важны. Они заслуживают внимания и математиков. Основной принцип, который, как правило, не должен нарушаться, состоит в следующем: при данных затратах (денежных, трудовых и любых иных) необходимо получать максимальную отдачу. Засевать поле нужно так, чтобы собирать максимально возможный урожай; откармливать скот таким образом, чтобы получать максимальный доход; выращивать птицу так, чтобы она не была в тягость хозяйству, а приносила бы и мясо, и яйца в достаточном количестве, достаточном не только на то, чобы окупить затраты на ее содержание, но и чтобы получить прибыль.

Обычно задачи оптимизации ставят таким образом: «Как при заданных расходах получить максимальную прибыль?» Или: «Как при заданной прибыли ограничиться минимальными расходами?» Нередко экономисты и организаторы производства желают невозможного и ставят задачу — при минимальных расходах добиться максимального дохода.

В последние десятилетия в экономической практике большое значение получили методы линейного программирования. Типичными примерами постановок задач линейного программирования могут быть две следующие.

а) Для кормления скота (птицы) имеются продукты A, B, C, D, стоимости которых соответственно равны c_1, c_2, c_3, c_4. Каждый из продуктов содержит в определенных долях необходимые для нормальной жизнедеятельности компоненты — белки, жиры, углеводы, витамины. Количества продуктов каждого вида заданы. Как подобрать рацион питания, чтобы животные получали полноценное питание по количеству и по каждой компоненте и при этом стоимость кормления оказалась минимальной?

б) Имеются три типа удобрений A, B, C, содержащие все необходимые для данной почвы компоненты, но с разным процентным их содержанием. Известны стоимости каждого типа удобрений и потребность почвы в каждой из компонент. В какой пропорции следует вносить имеющиеся удобрения в почву, чтобы почва получала в нужных количествах (не меньше) все необходимые компоненты и чтобы их стоимость была минимальной?

Вопросы механизации. Сейчас уже нет необходимости убеждать кого бы то ни было, что при огромном объеме работ в полеводстве и животноводстве, а тем более с учетом перспективы развития, уже невозможно обойтись в сельском хозяйстве только традиционным ручным трудом. Сельскому хозяйству нужна разнообразная, совершенная и надежная техника. Она необходима зерновому и хлопковому полю, огородным и бахчевым культурам, садам и виноградникам, животноводству и птицеводству. К этому следует добавить, что если раньше в деревне был избыток рабочей силы, то при теперешних темпах строительства и индустриализации страны деревня уже не может отдавать рабочие руки без ущерба для ведения хозяйства. В действительности же отток рабочей силы продолжается. Это обстоятельство настоятельно требует ускорения процесса механизации и автоматизации работ в колхозах и совхозах.

До сих пор сбор плодов в садах, копка корнеплодов, уборка урожая помидоров, перца, стручковых и бобовых культур требует использования ручного труда в огромных размерах. Необходимы машины для уборки яблок и абрикосов, помидоров и винограда, моркови и клубники. Страна нуждается в новых идеях конструкций уборочных машин, таких машин, которые работали бы надежно, аккуратно и быстро. Работали бы так, что яблоко, абрикос, слива, помидор и персик, убранные автоматом, были бы в таком же идеальном состоянии, в каком они оказываются после заботливых человеческих рук.

Машины, которые используются в сельском хозяйстве, должны выносить большие нагрузки — механические, вибрационные, ударные и абразивные. Им приходится работать в условиях бездорожья, передвигаться по пашне в пыли и грязи. При этом от них требуется, чтобы они извлекали все, что выращено, и не повреждали плодов земли. Следует добиваться того, чтобы сельскохозяйственные машины были надежны в работе и не требовали не только капитального ремонта в период полевых работ, но и подтяжек, регулировок, замен узлов и деталей. При уборке ценны не только часы, но и минуты, поэтому так дорого обходится простой комбайна даже на короткий срок. К сожалению, из-за непродуманности конструкции некоторых комбайнов даже простая операция по подкручиванию гаек превращается в серьезную проблему, поскольку до них трудно добраться. На все аспекты надежности сельскохозяйственной техники — безотказность, долговечность, ремонтоприспособленность — следует обратить самое пристальное внимание и конструкторам и производственникам. Когда речь идет о расчетах конструкций и испытаниях новой техники, помощь математики становится незаменимой.

Следует обратить внимание еще на один важный момент. Уже теперь сельское хозяйство потребляет огромные массы жидкого горючего. А в ближайшее время это потребление возрастет еще больше. Конструкторам сельскохозяйственной техники следует подумать над вопросом снижения энергоемкости сельскохозяйственных агрегатов. Например, комбайн «Дон-1500» весит в свободном состоянии почти 13 т. Его нужно приводить в движение по неровному полю, зачастую после дождя. Возникает вопрос: целесообразно ли двигать по полю такую махину? Не лучше ли в некоторых случаях разделить жатку и молотильный агрегат? Это, кстати, даст возможность производить раздельно уборку и обмолот, что совершенно необходимо при переувлажненных хлебах. Когда при уборке зерновых идут проливные дожди, в состоянии ли комбайн их просто жать? А ведь иногда это приходится делать. Раньше все было просто: лошадь тащила легкую жатку, далее хлеб сушили и обмолачивали. А что способен сделать комбайн? Далее естественно спросить специалистов: не портят ли тяжелые машины структуру почвы? Все эти вопросы важны, но еще недостаточно продуманы и изучены, они требуют серьезных экономических и народнохозяйственных расчетов. При этом не обойтись без широкого использования математики и вычислительной техники.

Мы видим, что сельское хозяйство предъявляет в наши дни серьезные требования к конструкторской и математической мысли, нуждается в кибернетических устройствах для автоматизации трудоемких процессов, часто подлинно ювелирного характера. Привлечь внимание пытливой молодежи к этим вопросам — наша обязанность. Ведь такой посев, как говорил Д. И. Менделеев, когда-нибудь созреет для жатвы народной.

§ 7. Об одной физической задаче

В современной физике хорошо известен прибор для подсчета числа космических частиц и ядерного излучения, который носит название счетчика Гейгера — Мюллера. Принцип работы этого прибора состоит в следующем: если прибор свободен, то попавшая в него частица вызывает разряд, длящийся время τ, в течение которого прибор нечувствителен к вновь попадающим частицам. Частица, вызвавшая разряд, регистрируется счетчиком. Требуется определить время, прошедшее от начала работы счетчика до первой потерянной частицы. Мы позднее уточним эту формулировку.

Опыт показывает, что расстояние между соседними по времени частицами случайно. Мы предположим, что эта величина имеет $F(x)$ своей функцией распределения вероятностей. Обычно в физической литературе τ предполагают постоянной величиной. Мы здесь будем считать τ случайной величиной с распределением $G(x)$. Это предположение как простейший частный случай содержит обычную гипотезу о постоянстве τ. Для этого достаточно считать, что $G(x)$ имеет в точке τ скачок величины 1.

Через ξ_1, ξ_2, ξ_3,... обозначим последовательные промежутки времени между появлением частиц в счетчике и через τ_1, τ_2,...— последовательные длины разрядов и сделаем предположение, что все эти величины между собой независимы.

В высказанных условиях поставленную задачу мы должны сформулировать так: найти распределение вероятностей промежутка времени от начала работы счетчика до момента потери первой частицы. Обозначим через $\Phi(x)$ искомую функцию распределения и через ς изучаемую случайную величину. Обозначим еще через $F_1(x)$ функцию распределения длительности промежутка времени от начала работы счетчика до появления первой частицы.

Очевидно, что данная частица не будет сосчитана тогда и только тогда, когда она появится в счетчике в момент мертвого периода жизни счетчика, в течение которого длится разряд от ранее попавшей в счетчик частицы. Очевидно, что первая частица, попавшая в счетчик после его включения, обязательно будет сосчитана, поскольку перед ней в счетчик не попадало ни одной частицы.

Для вывода интегральных уравнений, управляющих нашей задачей, нам целесообразнее будет рассматривать не функцию $\Phi(x)$, а ее дополнение до 1, т. е. функцию

$$\overline{\Phi}(x)=1-\Phi(x)=P\{\varsigma\geqslant x\}.$$

Эта функция означает вероятность того, что величина ς превзойдет заданное число x.

Это событие может наступить двумя существенно различными путями. Во-первых, может случиться, что первая частица придет позднее момента x, а во-вторых, может случиться, что первая частица появилась в счетчике в момент z, причем $z<x$, но до момента x ни одна частица счетчиком не была потеряна. Обозначим через $\omega(x-z)$ вероятность того, что если в момент z появилась первая частица, то до момента x ни одна из вновь появившихся частиц не будет потеряна счетчиком. Каких-либо иных возможностей для наступления события $\varsigma\geqslant x$ не существует. По формуле полной вероятности отсюда заключаем, что имеет место равенство

$$\overline{\Phi}(x)=\overline{F}_1(x)+\int_0^x\overline{\omega}(x-z)\,dF_1(z),$$

в котором $\overline{F}_1(x)=1-F_1(x)$. Мы получили уравнение для искомой функции распределения $\Phi(x)$ ценой введения новой неизвестной функции $\omega(x-z)$. Это означает, что мы должны составить еще одно уравнение, которое позволило бы определить функцию ω. С этой целью заметим, что интересующее нас событие может произойти двумя различными путями: первый же отрезок между первым и вторым прибытием частиц оказался большим, чем u; вторая частица прибыла в момент v $(v<u)$, но за это время разряд, вызванный первой частицей, завершился; до конца отрезка времени u не случится ни одного отказа от регистрации. Если учесть все возможности и воспользоваться формулой полной вероятности, то мы приходим к равенству

$$\overline{\omega}(u)=\overline{F}(u)+\int_0^u\overline{\omega}(u-v)\,G(v)\,dF(u).$$

Уравнения полученного типа непосредственно в терминах функций распределения не решаются. Такие уравнения решаются в терминах преобразований Лапласа — Стильтьеса. А именно, введем обозначения

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,d\Phi(x),\quad f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x),\quad g(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,G(x)\,dF(x),$$

$$f_1(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF_1(x),\quad \omega(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,d\omega(x).$$

Полученные нами уравнения в этих терминах записываются в таком виде:

$$\varphi(s)=f_1(s)\,\tilde{\omega}(s),\quad \tilde{\omega}(s)=f(s)-g(s)-\tilde{\omega}(s)\,g(s),$$

откуда

$$\varphi(s)=f_1(s)\cdot\frac{f(s)-g(s)}{1-g(s)}. \qquad (1)$$

Формально задача решена, поскольку по преобразованию Лапласа — Стильтьеса можно однозначно найти функцию распределения, ее породившую. Но, кроме того, преобразование Лапласа — Стильтьеса дает возможность легко вычислять моменты всех порядков путем дифференцирования. Действительно, легко проверить, что

$$[\varphi'(s)]_{s=0}=-\left[\int_0^\infty xe^{-sx}\,d\Phi(x)\right]_{s=0}=-\int_0^\infty x\,d\Phi(x),$$

т. е.

$$\varphi'(0)=-\int_0^\infty x\,d\Phi(x)=-M\varsigma.$$

Чтобы найти производную от функции $\varphi(s)$, запишем формулу (1) в виде

$$\ln\varphi(s)=\ln f_1(s)+\ln(f-g)-\ln(1-g)$$

и продифференцируем. В результате получим

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}=\frac{f_1'(s)}{f_1(s)}+\frac{f'(s)-g'(s)}{f(s)-g(s)}+\frac{g'(s)}{1-g(s)}.$$

Заметим теперь, что

$$\varphi(0)=\int_0^\infty d\,\Phi(x)=1=\int_0^\infty d\,F(x)=\int_0^\infty d\,F_1(x)=f(0)=f_1(0)$$

и, следовательно,

$$\varphi'(0)=f_1'(0)+\frac{f'(0)}{1-g(0)}.$$

Иными словами,

$$-\varphi'(0)=M\varsigma=a_1+\frac{a}{1-\alpha}, \qquad (2)$$

где $a_1=\int_0^\infty x\,dF_1(x)$, $a=\int_0^\infty x\,dF(x)$, $\alpha=\int_0^\infty G(x)\,dF(x)$.

Мы нашли простую и весьма полезную формулу для математического ожидания (среднего значения) величины ς. Вероятностный смысл величины α очень простой — это вероятность того, что разряд в счетчике пройдет раньше, чем появится очередная частица. Из формулы (2) мы делаем теперь следующий очевидный вывод: среднее время от начала работы счетчика до потери первой частицы увеличивается или 1) с ростом a, или 2) с приближением α к 1.

Рассмотрим внимательнее процесс образования ς. С этой целью заметим, что если счетчик потеряет вторую частицу, то вероятность этого события равна $1-\alpha$ (вторая частица прибудет раньше, чем закончится разряд, вызванный регистрацией первой). Вероятность того, что первой не будет зарегистрирована третья по порядку частица, поступившая в счетчик, равна $(1-\alpha)\alpha$ (вторая частица прибудет после того, как закончится разряд от первой частицы; третья частица прибудет в период разряда от второй). Вообще вероятность того, что не будет зарегистрирована k-ая частица, оказывается равной $(1-\alpha)\alpha^{k-2}$. Таким образом, если через ν мы обозначим номер впервые не зарегистрированной частицы, то имеет место равенство

$$P\{\nu=k\}=(1-\alpha)\alpha^{k-2},\ k=2,\ 3,\dots .$$

Это распределение вероятностей называется *геометрическим*.

Теперь становится ясным, что для величины ς имеют место равенства

$$\begin{aligned}\varsigma=\xi_1+\xi_2 &\quad \text{с вероятностью } 1-\alpha,\\ \xi_1+\xi_2+\xi_3 &\quad \text{с вероятностью } (1-\alpha)\alpha,\\ \dots\dots\dots\dots &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_k &\quad \text{с вероятностью } (1-\alpha)\alpha^{k-2}.\end{aligned}$$

Иными словами, ς есть сумма независимых случайных величин в случайном числе:

$$\varsigma=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_\nu,$$

где ν имеет геометрическое распределение.

Спросим себя теперь: если длительность разряда невелика по сравнению с длительностью промежутка времени между последовательными прибытиями частиц в счетчик, то не будет ли каких-нибудь простых закономерностей? Ответ заключается в следующем предложении.

Если $\alpha\sim 1$ (α близко к 1) и случайная величина ξ_k имеет конечное математическое ожидание ($a<\infty$), то имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$P\left\{\frac{\varsigma}{M\varsigma}<x\right\}\sim 1-e^{-x}.$$

Для доказательства этого факта нам следует вспомнить одну теорему теории вероятностей: *для того чтобы последовательность функций распределения $F_n(x)$ неотрицательных случайных величин ς_n сходилась к функции распределения $F(x)$, необходимо и достаточно сходимости преобразований Лапласа — Стильтье-*

са $f_n(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dF_n(x)$ *к преобразованию Лапласа — Стильтьеса предельного распределения* $f(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dF(x)$.

В сформулированном нами предложении преобразование Лапласа — Стильтьеса предельного распределения оказывается равным

$$f(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}d\left[1-e^{-x}\right]=\frac{1}{1+s},$$

а допредельные равны

$$\varphi\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)=f_1\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)\cdot\frac{f\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)-g\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)}{1-g\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)}.$$

Несложными преобразованиями последнего выражения приводим его к виду

$$\varphi\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)=f_1\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)\frac{1}{\dfrac{1-f\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)}{f\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)-g\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)}}.$$

В предположении $\alpha\sim 1$ формула (2) показывает, что $M\varsigma\sim\infty$. Таким образом, при каждом s оказывается $\frac{s}{M\varsigma}\sim 0$ и в силу непрерывности $f_1(s)$ мы заключаем, что $f_1\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)\sim 1$.

Рассмотрим теперь второе слагаемое знаменателя последнего выражения. Оно может быть записано в таком виде

$$\frac{1-f\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)}{f\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)-g\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)}=\frac{1-f\frac{s}{M\varsigma}}{\frac{s}{M\varsigma}}\cdot\frac{s}{M\varsigma\left[f(s/M\varsigma)-g\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)\right]}.$$

Первый множитель правой части этого равенства является не чем иным, как отношением приращения функции к приращению аргумента и, значит, при $\alpha\sim 1$

$$\frac{1-f\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)}{\frac{s}{M\varsigma}}=\frac{f\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)-f(0)}{\frac{s}{M\varsigma}}\sim -f'(0)=a.$$

Теперь весь второй член знаменателя асимптотически равен

$$\frac{sa}{M\varsigma}\cdot\frac{1}{f\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)-g\left(\frac{s}{M\varsigma}\right)}=s\left[\left(\frac{a_1}{a}+\frac{1}{1-\alpha}\right)\left((1-\alpha)-(1-\alpha)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_0^\infty e^{-\frac{sx}{M\varsigma}}(1-G(x))\,dF(x)\right)\right]=$$

$$=s\left[\left(\frac{a_1}{a}+\frac{1}{1-\alpha}\right)\left(1-\alpha-\int\limits_0^\infty\left(1-e^{-\frac{sx}{M\varsigma}}\right)(1-G(x))\,dF(x)\right)\right]=$$

$$=s\left[\frac{a_1}{a}(1-\alpha)+1\right]\left[1-\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^\infty\left(1-e^{-\frac{sx}{M\varsigma}}\right)(1-G(x))\,dF(x)\right].$$

Докажем теперь, что интеграл, стоящий в скобках, при нашем условии, наложенном на α, мал.

Действительно, выберем достаточно большое A (мы его укажем позднее) и запишем интересующий нас интеграл в следующем виде

$$0\leqslant\frac{1}{1-a}\int\limits_0^\infty\left(1-e^{-\frac{sx}{M\varsigma}}\right)\left(1-G(x)\right)dF(x)=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left[\int\limits_0^A+\int\limits_a^\infty\left(1-e^{-\frac{sx}{M\varsigma}}\right)(1-G(x))\,dF(x)\right].$$

Вспомним, что при любом положительном z имеет место неравенство

$$1-e^{-z}\leqslant z.$$

В первом слагаемом воспользуемся этим неравенством, а во втором отбросим первый множитель, заменив его на бо́льшую величину, на 1. В результате получим неравенство

$$0\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^\infty\left(1-e^{-\frac{sx}{M\varsigma}}\right)\left(1-G(x)\right)dF(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{sA}{(1-\alpha)M\varsigma}\left[\int\limits_0^A(1-G(x))\,dF(x)+\int\limits_0^\infty(1-G(x))\,dF(x)\right].$$

Усилим это неравенство, заменив в первом интеграле верхний предел интегрирования с A на ∞. Во втором интеграле, выбрав A достаточно большим, мы можем сделать этот интеграл как угодно малым по сравнению с $1-\alpha$. Таким образом получим

$$0 \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\int_0^\infty \left(1-e^{-\frac{sx}{M\varsigma}}\right)(1-G(x))\,dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{sA}{(1-\alpha)+a}\left[(1-\alpha)+o(1-\alpha)\right]=o(1-\alpha).$$

Собрав воедино все сделанные оценки, мы получим окончательно, что

$$\varphi\left(\frac{t}{M\varsigma}\right) \sim \frac{1}{1+s}.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

В § 4 второй главы мы рассказывали о модели резервирования. Теперь наступило время для продолжения этого рассказа. Если внимательно сравнить только что рассмотренную задачу работы счетчика Гейгера — Мюллера и работу дублированной системы, то окажется, что математически это одна и та же задача. Только в задаче о дублировании нужно положить $F_1(x)=F(x)$. Для нас это сопоставление явится толчком для следующего заключения: *рассмотрение асимптотических теорем для случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин представляет не единичный, а общий интерес.* В связи с этим возникает необходимость в построении некоторой теории, которую, когда она будет создана, можно будет использовать в качестве метода исследования как в ряде задач практики, так и внутри самой математики. Эта теория разрабатывается нами начиная с 1969 года и уже привела к ряду, как мне кажется, интересных результатов, которые, по-видимому, найдут применение в математической статистике, статистической физике и в ряде других областей знания. Однако самое важное — рассмотрение задачи теории надежности привело к формулировке той задачи, которая представляет и основной теоретический интерес.

Представим себе, что мы совершенствуем систему ремонта, в результате чего длительность ремонта делается меньше, а функция распределения длительности ремонта $G_n(x)$ зависит от номера этапа совершенствования n. Быстрое обслуживание означает, что выражение $1-\alpha_n=\int_0^\infty [1-G_n(x)]\,dF(x)$ при $n \to \infty$ стремится к 0. Именно для этого предположения удалось получить первоначально большое число результатов. Затем удалось отказаться от предположения положительности слагаемых и от специального предположения относительно распределения ν_n (геометрическое распределение).

Библиотека учителя математики

БОРИС ВЛАДИМИРОВИЧ ГНЕДЕНКО

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

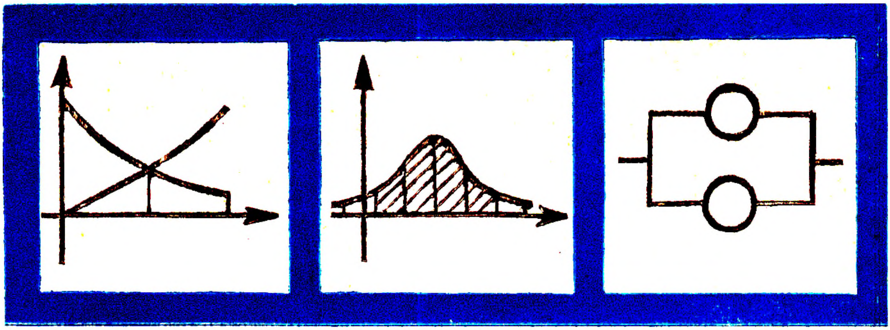
Зав. редакцией Р. А. ХАБИБ
Редактор Г. С. УМАНСКИЙ
Младший редактор Н. Т. ПРОТАСОВА
Художник Б. Н. ЮДКИН
Художественный редактор Е. Н. КАРАСИК
Технический редактор С. С. ЯКУШКИНА
Корректоры К. А. ИВАНОВА,
В. И. ГРОМОВА

ИБ № 8099

Сдано в набор 13.12.84. Подписано к печати 01.07.85. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 12.0. Усл. кр.-отт. 12,19. Уч.-изд. л. 12,73. Тираж 233 500 экз. Заказ 985. Цена 55 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129 846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.



Библиотека учителя математики

Б. В. ГНЕДЕНКО

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ